Γ' Λυκείου / Μαθηματικά Κατεύθυνσης /Άλγεβρα /Μιγαδικοί

Λυμένες Ασκήσεις

1. Να γραφεί ο μιγαδικός 3-i στην μορφή α(3+i)+b(3-i).

Λύση

$\alpha(3+\mathrm{i})+\mathrm{b}(3-\mathrm{i})=3-i \Leftrightarrow 3a+ai+3b-bi=3-i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\alpha+3b+(a-b)i=3-i \Leftrightarrow 3(a+b)=3\ \ \kappa\alpha\iota\ (a-b)=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+b=1\ \kappa\alpha\iota\ a-b=-1 \Leftrightarrow \alpha=0\ \kappa\alpha\iota\ b=1$

2. Αν z,w,t ∈ ℂ και $|z|=|w|=|t|=1\ ,z+w+t=1\ ,\nu\alpha\ \delta\varepsilon\iota\chi\tau\varepsilon\acute{\iota}\ \acute{o}\tau\iota\ \frac{1}{z}+\frac{1}{w}+\frac{1}{t}=1$

Λύση

$|z|=1\ \ \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

$|w|=1\ \ \Leftrightarrow |w|^2=1 \Leftrightarrow w\bar{w}=1 \Leftrightarrow \bar{w}=\frac{1}{w}$

$|t|=1\ \ \Leftrightarrow |t|^2=1 \Leftrightarrow t\bar{t}=1 \Leftrightarrow \bar{t}=\frac{1}{t}$

Τότε θα έχουμε $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}+\frac{1}{t}=\bar{z}+\ \bar{w}+\ \bar{t}=\overline{z+w+t}=1$

3. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z+16| = 4|z+1|$, να δειχτεί ότι $|z| = 4$

Λύση

$|z+16| = 4|z+1| \Leftrightarrow |z+16|^2 = 16|z+1|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z+16)(\bar{z}+16) = 16(z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + 16z + 16\bar{z} + 256 = 16(z\bar{z} + z + \bar{z} + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15z\bar{z} = 240 \Leftrightarrow z\bar{z} = 16 \Leftrightarrow |z|^2 = 16 \Leftrightarrow |z| = 4$

4. Να βρεθεί ο $z \in \mathbb{C}$ αν $|z^2| = 1 = |z-1|$

Λύση

$$Έχουμε\ |z^2| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1\ και\ αν\ z = x + yi,$$

$$τότε\ z\bar{z} = x^2 + y^2 = 1, και\ επειδή\ \ |z-1| = 1 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = z + \bar{z} = 2\chi = 1 \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{2}$

$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z-2| = |z-4|$, να δειχτεί ότι $Re(z) = 3$

Λύση

$|z-2| = |z-4| \Leftrightarrow |z-2|^2 = |z-4|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-2)(\bar{z}-2) = (z-4)(\bar{z}-4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4 = z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 \Leftrightarrow 2(z+\bar{z}) = 12 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 6$

$και\ αν\ z = x + yi \Leftrightarrow z + \bar{z} = 2\chi = 6 \Leftrightarrow x = Re(z) = 3$

6. Να βρεθούν οι μιγαδικοί z=x+yi, ώστε ο w να είναι πραγματικός με
$w = (z-2)(\bar{z}+i)$

Λύση

$(z-2)(\bar{z}+i) = \overline{(z-2)(\bar{z}+i)} \Leftrightarrow (z-2)(\bar{z}+i) = (\bar{z}-2)(z-i)$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + iz - 2\bar{z} - 2i = z\bar{z} - i\bar{z} - 2z + 2i \Leftrightarrow i(z+\bar{z}) + 2(z-\bar{z}) - 4i = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2xi + 2yi - 4i = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 - x$

Επομένως z=x+(2-x)i

7. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z+16| = 4|z+1|$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μιγαδικού επιπέδου.

Λύση

$|z+16| = 4|z+1| \Leftrightarrow |z+16|^2 = 16|z+1|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z+16)(\bar{z}+16) = 16(z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + 16z + 16\bar{z} + 256 = 16(z\bar{z} + z + \bar{z} + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15z\bar{z} = 240 \Leftrightarrow z\bar{z} = 16 \Leftrightarrow |z|^2 = 16 \Leftrightarrow |z| = 4$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με ακτίνα 4 και κέντρο την αρχή των αξόνων.

8. Αν $z_k = \sigma\upsilon\nu\theta_\kappa + i\eta\mu\theta_\kappa$, $\mu\varepsilon\ \kappa = 1,2,..\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$
να δειχτεί ότι: $|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_\nu| \le \nu$

Λύση

$|z_k| = |\sigma\upsilon\nu\theta_\kappa + i\eta\mu\theta_\kappa| = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta_\kappa + \eta\mu^2\theta_\kappa} = 1\ \gamma\iota\alpha\ \kappa = 1,2,..\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$

Άρα $|z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_\nu| = \nu$, ακόμη ισχύει

$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_\nu| \le |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_\nu| = \nu$

Άρα $|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_\nu| \le \nu$

9. Αν $z = (1 + συνθ + iημθ)^ν \, , ν \in \mathbb{N}^*, -π < θ < π.$

$Να\ βρεθούν\ τα\ |z|\ και$ arg(z)

Λύση

Είναι $z = (1 + συνθ + iημθ)^ν = (2συν^2\frac{θ}{2} + 2iημ\frac{θ}{2}συν\frac{θ}{2})^ν =$

$$\left[2συν\frac{θ}{2}(συν\frac{θ}{2} + iημ\frac{θ}{2})\right]^ν = 2^ν συν^ν\frac{θ}{2}(συν\frac{θ}{2} + iημ\frac{θ}{2})^ν =$$

$$= 2^ν συν^ν\frac{θ}{2}(συν\frac{νθ}{2} + iημ\frac{νθ}{2})$$

Εφόσον $-π < θ < π \Leftrightarrow -\frac{π}{2} < \frac{θ}{2} < \frac{π}{2}$ $, έτσι\ συν\frac{θ}{2} > 0$

Άρα $|z| = 2^ν συν^ν\frac{θ}{2}$ και $\arg(z) = \frac{νθ}{2}$

10. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $z - |z - 1| + i = 0.$

Λύση

Έχουμε $z - |z - 1| + i = 0 \Leftrightarrow x + yi - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + i = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + yi - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + i = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + (1+y)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + (1+y)i = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 0\ και\ (1+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 0\ και\ (1+y) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\ και\ \ y = -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (x-1)^2 + y^2\ και\ \ y = -1\ \ με\ x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2\ και\ \ y = -1\ \ με\ x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 + 1 = 0\ και\ \ y = -1\ \ με\ x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x = -2\ \ και\ \ y = -1\ \ με\ x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1\ \ και\ \ y = -1\ \ με\ x \geq 0$$

Άρα ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z = 1 - i$

11. Να λυθεί η εξίσωση: $z^5 + \sqrt{3} = i$

Λύση

$z^5 = -\sqrt{3} + i = 2(\sigma\upsilon\nu 150 + i\eta\mu 150)$

Τότε οι ρίζες της εξίσωσης θα δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[5]{2}\,(\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi + 150}{5} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi + 150}{5}\ , \mu\varepsilon\ \kappa = 0,1,2,3,4$$