Διαφορικός Λογισμός

Ορισμός

Μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο χ_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{\chi \to \chi_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός, ονομάζεται **παράγωγος της f στο σημείο χ_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Γεωμετρική Ερμηνεία της Παραγώγου

Η παράγωγος $f'(\chi_0)$ εκφράζει το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$.

Επομένως ισχύει ότι $f'(\chi_0) = \varepsilon\varphi\omega$, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $\chi'\chi$ και η εξίσωση της εφαπτομένης θα δίνεται από τον τύπο: $y - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(x - \chi_0)$

Ρυθμός Μεταβολής

Αν $y = f(x)$ μια συνάρτηση του χ, τότε ρυθμός μεταβολής της f ως προς χ στο χ_0 είναι η παράγωγος της f στο χ_0.

Θεώρημα

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Κανόνες Παραγώγισης:

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	
Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^k\,, \qquad k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = kx^{k-1}\,, \qquad k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}\ , x \geq 0$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ , x > 0$
$f(x) = \eta\mu\chi$	$f'(x) = \sigma\upsilon\nu\chi$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu\chi$	$f'(x) = -\eta\mu\chi$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = lnx\ , x > 0$	$f'(x) = \dfrac{1}{\chi}$
$f(x) = \varepsilon\varphi\chi\ , \sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$
$f(x) = \sigma\varphi\chi\ , \eta\mu\chi \neq 0$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2\chi}$
$f(x) = \dfrac{1}{\chi}\ , \chi \neq 0$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\chi^2}$
$f(x) = \alpha^x\ , \qquad \alpha > 0$	$f'(x) = \alpha^x\ \ lna$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	
Σύνθετη Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x) = g^k(x)$	$f'(x) = kg^{k-1}(x)g'(x)$
$f(x) = \sqrt{g(x)}\ , g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}g'(x)\ , g(x) > 0$
$f(x) = \eta\mu(g(x))$	$f'(x) = \sigma\upsilon\nu(g(x))\, g'(x)$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu(g(x))$	$f'(x) = -\eta\mu(g(x))\, g'(x)$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)}g'(x)$
$f(x) = lng(x)\ , g(x) > 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x) = \varepsilon\varphi(g(x))\ , \sigma\upsilon\nu(g(x)) \neq 0$	$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(g(x))}g'(x)$
$f(x) = \sigma\varphi(g(x))\ , \eta\mu(g(x)) \neq 0$	$f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2(g(x))}g'(x)$
$f(x) = \frac{1}{g(x)}\ , g(x) \neq 0$	$f'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2}g'(x)$
$f(x) = \alpha^{g(x)}$	$f'(x) = \alpha^{g(x)}\ lna \cdot g'(x)$
$f(x) = (h(x))^{\,g(x)}$	$f'(x) = (e^{g(x)lnh(x)})'$

Θεώρημα Rolle

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη τουλάχιστον στο (α, β) , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

- Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $f'(\chi) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.
- Αν η f, g είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και $f'(\chi) = g'(\chi)$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε σημείο χ του Δ, να ισχύει: $f(\chi) = g(x) + c$

Μονοτονία Συνάρτησης

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και $f'(\chi) > 0$ για κάθε χ του Δ, τότε η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ.
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και $f'(\chi) < 0$ για κάθε χ του Δ, τότε η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ.

Θεώρημα Fermat

Αν υπάρχει η $f'(\chi_0)$, όπου το χ_0 ανήκει στο διάστημα Δ και το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό ακρότατο, τότε $f'(\chi_0) = 0$.

Ακρότατα Συνάρτησης(χρήση 1ης παραγώγου)

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β), $f'(\chi_0) = 0$ με $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ και ισχύει $f'(\chi) > 0$ για κάθε χ στο (α,χ_0) και $f'(\chi) < 0$ για κάθε χ στο (χ_0,β), τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο χ_0 τοπικό μέγιστο με τιμή $f(\chi_0)$.
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β), $f'(\chi_0) = 0$ με $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ και ισχύει $f'(\chi) < 0$ για κάθε χ στο (α,χ_0) και $f'(\chi) > 0$ για κάθε χ στο (χ_0,β), τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο χ_0 τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(\chi_0)$.

Ακρότατα Συνάρτησης(χρήση 2ης παραγώγου)

- Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in \Delta$ με $f'(\chi_0) = 0$ και ισχύει $f''(\chi_0) < 0$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο χ_0 τοπικό μέγιστο με τιμή $f(\chi_0)$.
- Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in \Delta$ με $f'(\chi_0) = 0$ και ισχύει $f''(\chi_0) > 0$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο χ_0 τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(\chi_0)$.

Κυρτότητα Συνάρτησης

- Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \Delta$ τότε η συνάρτηση f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω) στο Δ.
- Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει $f''(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in \Delta$ τότε η συνάρτηση f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω) στο Δ

Θεώρημα

Αν το σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι σημείο καμπής (αλλαγή της κυρτότητας) της γραφικής παράστασης της f και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(\chi_0) = 0$.

Κριτήριο ύπαρξης σημείου καμπής

Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) με $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ και η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του χ_0 και ορίζεται η εφαπτομένη στο σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$, τότε το σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι σημείο καμπής.

Κανόνες De L'Hospital

- $$Αν \lim_{\chi\to\chi_0} f(x) = \lim_{\chi\to\chi_0} g(x) = 0 \ και\, υπάρχει\, το \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  τότε ισχύει :

  $$\lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- $$Αν \lim_{\chi\to\chi_0} f(x) = \lim_{\chi\to\chi_0} g(x) = +\infty \ και\, υπάρχει\, το \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  τότε ισχύει :

  $$\lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\chi\to\chi_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$