Μιγαδικοί Αριθμοί

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών περιέχει το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με τις ίδιες πράξεις και ιδιότητες, τα ίδια ουδέτερα στοιχεία στην πρόσθεση (0) και στον πολλαπλασιασμό (1) ***και επιπλέον*** ένα στοιχείο $\boldsymbol{i}$ (φανταστική μονάδα)τέτοιο ώστε $\boldsymbol{i^2 = -1}$ και κάθε στοιχείο z του $\mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = \alpha + \beta i$, *όπου* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Στον μιγαδικό αριθμό $\boldsymbol{z = \alpha + \beta i}$, *όπου* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, το **α** ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του **z** και συμβολίζεται ως **Re(z)** ενώ το **β** ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του **z** και συμβολίζεται ως **Im(z)**.

Ισότητα Μιγαδικών αριθμών

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha + \beta i$, $\gamma + \delta i$ είναι ίσοι όταν είναι ίσα τα πραγματικά ***και*** τα φανταστικά τους μέρη αντίστοιχα.

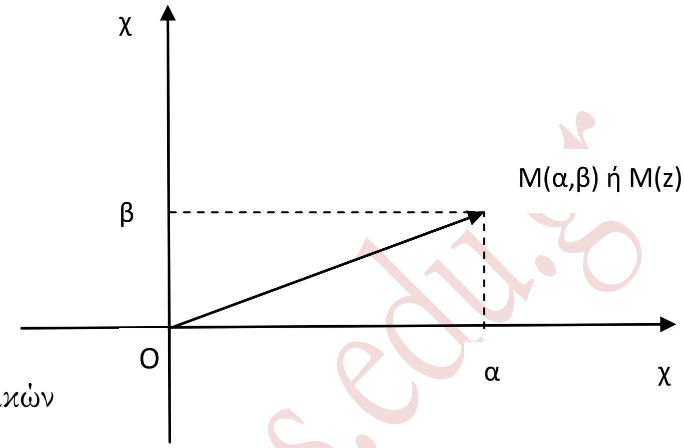
$$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow a = \gamma \;\textit{και}\; \beta = \delta$$

Έτσι ένας μιγαδικός $\alpha + \beta i$ είναι ίσος με το μηδέν όταν το πραγματικό ***και*** το φανταστικό του μέρος είναι ίσα με το μηδέν.

$$\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow a = 0 \;\textit{και}\; \beta = 0$$

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών αριθμών

Κάθε μιγαδικός αριθμός $\boldsymbol{z = \alpha + \beta i}$ παριστάνεται σε ένα καρτεσιανό επίπεδο (**μιγαδικό επίπεδο**) ως ένα σημείο Μ(α,β) όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



Ο άξονας χ'χ είναι ο άξονας των πραγματικών ενώ ο άξονας y'y είναι ο άξονας των φανταστικών και ονομάζονται αντίστοιχα **πραγματικός** και **φανταστικός άξονας**.

Πράξεις Μιγαδικών Αριθμών

- $(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$
- $(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$
- $(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$
- $\frac{(\alpha+\beta i)}{(\gamma+\delta i)} = \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2} i$
- $i^{\nu} = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho}\, i^{\upsilon} = (i^4)^{\rho}\, i^{\upsilon} = 1\, i^{\upsilon} = i^{\upsilon} = \begin{cases} 1 \ , & \upsilon=0 \\ i \ , & \upsilon=1 \\ -1 \ , & \upsilon=2 \\ -i \ , & \upsilon=3 \end{cases}$

Ιδιότητες Συζυγών

Αν $z = \alpha + \beta i$ και ο **συζυγής** του $\bar{z} = \alpha - \beta i$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε θα έχω:

- $z + \bar{z} = 2\alpha$
- $z - \bar{z} = 2\beta i$
- $z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$

Επίλυση της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ (1) $\mu\varepsilon\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\ \kappa\alpha\iota\ \alpha \neq 0$

Για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (1), όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $A\nu\ \Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δυο πραγματικές ρίζες, οι οποίες προκύπτουν από τον γνωστό τύπο $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

- $A\nu\ \Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική ρίζα, η οποία προκύπτει από τον γνωστό τύπο $z = \frac{-\beta}{2\alpha}$

- $A\nu\ \Delta < 0$, τότε η εξίσωση έχει δυο μιγαδικές ρίζες, οι οποίες προκύπτουν από τον τύπο $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

Σημειώνεται ότι για τις παραπάνω ρίζες ισχύουν οι γνωστές σχέσεις

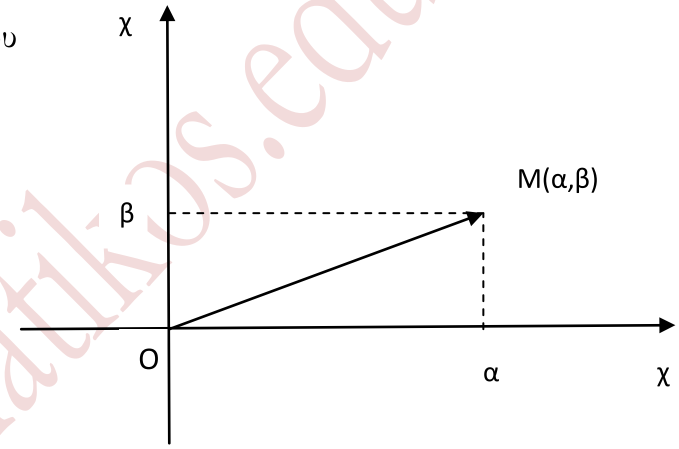
$$z_1 + z_2 = \frac{-\beta}{\alpha} \qquad \text{και} \qquad z_1 z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$
ως **μέτρο** ορίζουμε την απόσταση της εικόνας του

Μ από την αρχή των αξόνων Ο.

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + \beta^2}$$



Ιδιότητες Μέτρου Μιγαδικού Αριθμού

- $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που εκφράζεται από την εξίσωση $|z - z_0| = \rho$ με ρ>0 παριστάνει κύκλο με κέντρο την εικόνα του μιγαδικού z_0 και ακτίνα ρ.
- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που εκφράζεται από την εξίσωση $|z - z_0| \le \rho$ με ρ>0 παριστάνει κυκλικό δίσκο με κέντρο την εικόνα του μιγαδικού z_0 και ακτίνα ρ, ενώ η εξίσωση $|z - z_0| > \rho$ με ρ>0 παριστάνει τα σημεία του επιπέδου τα οποία είναι εξωτερικά του κύκλου με κέντρο την εικόνα του μιγαδικού z_0 και ακτίνα ρ.
- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που εκφράζεται από εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετη ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2.
- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που εκφράζεται από την εξίσωση $|z - z_1| + |z - z_2| = 2\alpha$ με α>0 και $(E_1E_2)<2\alpha$ παριστάνει έλλειψη με εστίες τα σημεία E_1, E_2 και σταθερό άθροισμα 2α.

- Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που εκφράζεται από την εξίσωση $\left||z-z_1|-|z-z_2|\right|=2\alpha$ με α>0 και (E_1E_2)>2α παριστάνει υπερβολή με εστίες τα σημεία E_1 , E_2 και σταθερή διαφορά 2α.