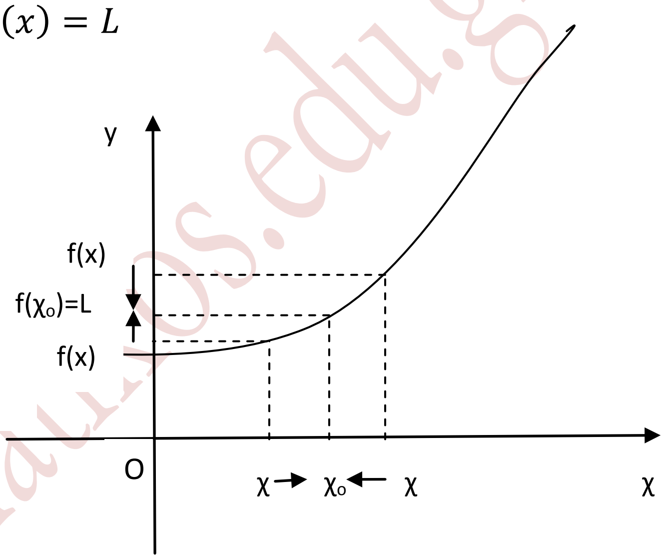
Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

Το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_o από αριστερά και από δεξιά είναι $f(xo) = L$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = L$$



Όριο και Διάταξη

$$Αν \lim_{x\to x_0} f(x) > 0, τότε\ f(x) > 0\ κοντά\ στο\ x_0$$

$$Αν \lim_{x\to x_0} f(x) < 0, τότε\ f(x) < 0\ κοντά\ στο\ x_0$$

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει: $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$

Πράξεις με όρια

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to x_0}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ , c\in\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\ ,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^k = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^k, k\in\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$

- $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$

Μη Πεπερασμένο $(+\infty, -\infty)$ όριο στο $\chi_o \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	?

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)]$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- Αν P(x) και Q(x) δυο πολυώνυμα τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \; \mu\varepsilon \; Q(x_0) \neq 0$$

- (Κριτήριο Παρεμβολής)

Έστω οι συναρτήσεις *f, g, h.* Αν ισχύουν τα παρακάτω:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \; \kappa o \nu \tau \acute{\alpha} \; \sigma \tau o \; x_0$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

<u>τότε</u> $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

- Αν $P(x) = \alpha_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ και

$Q(x) = b_\kappa x^\kappa + b_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \cdots + b_0$ με $\alpha_n \neq 0, b_\kappa \neq 0$

τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (\alpha_n x^n)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{\alpha_n x^n}{b_\kappa x^\kappa}\right)$$

Βασικά όρια

- Για $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{2\nu} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

- $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\chi}{\eta\mu\chi} = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi - 1}{\chi} = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi\chi}{\chi} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\chi}{\varepsilon\varphi\chi} = 1$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln\chi}{\chi - 1} = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{\chi} = 1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & , a > 1 \\ -\infty & , 0 < a < 1 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & , a > 1 \\ +\infty & , 0 < a < 1 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x} = \begin{cases} +\infty & , a > 1 \\ 0 & , 0 < a < 1 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} a^{x} = \begin{cases} 0 & , a > 1 \\ +\infty & , 0 < a < 1 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Συνέχεια Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο A με $x_0 \in A$.

Η f είναι **συνεχής στο x_0** όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Έστω οι συναρτήσεις f , g οι οποίες είναι συνεχείς στο σημείο x_0 τότε και οι συναρτήσεις, οι οποίες ορίζονται σε διάστημα κοντά στο x_0

$f + g$

$k \cdot f \; \mu\varepsilon \; k \in \mathbb{R}$

$f \cdot g$

$\frac{f}{g}$

$|f|$

$\sqrt[n]{f}$

θα είναι συνεχείς στο σημείο x_0.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ (σύνθεση) θα είναι και αυτή συνεχής στο x_0.

Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σ'ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

- Το θεώρημα Bolzano μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας τουλάχιστον ρίζας στο ανοικτό διάστημα (α,β)

Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σ'ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\eta$

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ'ένα κλειστό διάστημα [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Απροσδιόριστες μορφές – Κανόνες De L'Hopital

$Αν \lim_{x\to x_0} f(x) = 0\,,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\,, x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ *και υπάρχει το* $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *τότε*:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$Αν \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\,,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty\,, x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ *και υπάρχει το* $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *τότε*:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$