



1ο Διαγώνισμα (Διαφορικός Λογισμός)

Διάρκεια: $2\frac{1}{2}$ ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(x) = 2x - 2e^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, 0)$.

Μονάδες 7

β) Αποδείξτε ότι $f(x) \neq \ln 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

γ) Αποδείξτε ότι η C_f τέμνει μόνο μια φορά τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 4

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$e^{f(0)} \cdot f(\xi) = -1$$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης, έχουμε

$$f'(x) = 2 - 2e^{-f(x)} \cdot [-f'(x)] \Rightarrow f'(x) = 2 + 2e^{-f(x)} \cdot f'(x) \text{ . Είναι } f(1) = 0$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχουμε: } f'(1) = 2 + 2e^{-f(1)} \cdot f'(1) \Rightarrow f'(1) = 2 + 2e^0 \cdot f'(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1) = 2 + 2f'(1) \Rightarrow f'(1) = -2 \text{ . Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι}$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2 \text{ .}$$



β) Επιλύουμε ως προς $f(x)$ τη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$f'(x) = 2 + 2e^{-f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow f'(x) - 2 = \frac{2f'(x)}{e^{f(x)}} \Rightarrow e^{f(x)} = \frac{2f'(x)}{f'(x) - 2}.$$

Είναι $f'(x) < 0$, άρα $f'(x) \neq 2$ και $\frac{2f'(x)}{f'(x) - 2} > 0$.

Άρα θα έχουμε

$$\ln e^{f(x)} = \ln \left[\frac{2f'(x)}{f'(x) - 2} \right] \Rightarrow f(x) = \ln \left[\frac{2f'(x)}{f'(x) - 2} \right]. \text{ Έστω ότι υπάρχει}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \ln 2$. Τότε $\ln \left[\frac{2f'(x_0)}{f'(x_0) - 2} \right] = \ln 2$. Αφού η

συνάρτηση $\ln x$ είναι 1-1 θα έχουμε: $\frac{2f'(x_0)}{f'(x_0) - 2} = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2f'(x_0) = 2f'(x_0) - 4 \Rightarrow 0 = -4. \text{ Άτοπο. Άρα } f(x) \neq \ln 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Η C_f τέμνει τον $\chi\chi$ στο σημείο $A(1,0)$. Έστω ότι τον τέμνει και σε

άλλο σημείο $B(x_1, 0)$ με $x_1 \neq 1$. Τότε $f(x_1) = 0$. Η δοσμένη σχέση

γράφεται: $0 = 2x_1 - 2e^{-0} \Leftrightarrow 0 = 2x_1 - 2 \Leftrightarrow x_1 = 1$. Άτοπο. Άρα η C_f , τέμνει

τον $\chi\chi$ μόνο στο σημείο $A(1,0)$.

(**Παρατήρηση**: Αργότερα θα δούμε ότι αφού $f'(x) < 0$ η f είναι

γνησίως φθίνουσα και άρα τέμνει τον $\chi\chi$ σε ένα μόνο σημείο)

δ) Για $x = 0$, $f(0) = -2e^{-f(0)} \Rightarrow f(0) = -\frac{2}{e^{f(0)}} \Rightarrow f(0)e^{f(0)} = -2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} \cdot f(x) + 1$. Η g είναι συνεχής

ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών. (Η f ως παραγωγίσιμη είναι

συνεχής). Είναι $g(0) = e^{f(0)} \cdot f(0) + 1 = -2 + 1 = -1 < 0$ και

$g(1) = e^{f(1)} \cdot f(1) + 1 = 0 + 1 = 1 > 0$. Δηλαδή $g(0) \cdot g(1) < 0$. Από θεώρημα

Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$. Άρα

$$e^{f(\xi)} \cdot f(\xi) + 1 = 0 \Rightarrow e^{f(\xi)} \cdot f(\xi) = -1.$$



ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{\alpha}{x+\alpha}\right)$ και η

συνάρτηση g για την οποία ισχύει η σχέση

$$g(x) = e^{f(x)} + f'(x) + f''(x) \text{ για κάθε } x \in D_f$$

Αν ισχύει η σχέση $g(-3) = 0$

A) Να βρεθεί η τιμή του α .

Μονάδες 4

B) Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της f

Μονάδες 3

B) Αποδείξτε ότι ισχύει $e^{f(x)} + 2f'(x) = 0$ για κάθε $x \in D_f$.

Μονάδες 5

Γ) Να λυθεί η ανίσωση

$$-3f''(x) > x \cdot f'(x), \quad x \in D_f.$$

Μονάδες 7

Δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2^+} [g(x) \cdot [1 - \sigma\upsilon\nu(2x+4)]]$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

$$\text{A) Είναι } f'(x) = \frac{1}{x+\alpha} \left(\frac{\alpha}{x+\alpha} \right)' = \frac{x+\alpha}{\alpha} \left[-\frac{\alpha}{(x+\alpha)^2} \right] = -\frac{1}{x+\alpha}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x+\alpha} \right)' = \frac{1}{(x+\alpha)^2}. \text{ Άρα θα έχουμε}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{\ln \frac{\alpha}{x+\alpha}} - \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{(x+\alpha)^2} = \frac{\alpha}{x+\alpha} - \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{(x+\alpha)^2} = \\ &= \frac{\alpha(x+\alpha) - (x+\alpha) + 1}{(x+\alpha)^2} = \frac{\alpha x + \alpha^2 - x - \alpha + 1}{(x+\alpha)^2}. \text{ Άρα θα είναι} \end{aligned}$$



$$g(-3) = \frac{-3\alpha + \alpha^2 + 3 - \alpha + 1}{(-3 + \alpha)^2} = \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 4}{(-3 + \alpha)^2}. \text{ Αφού } g(-3) = 0 \text{ θα έχουμε}$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow (\alpha - 2)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2.$$

Β) Είναι $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x+2}\right)$ και $f'(x) = -\frac{1}{x+2}$. Άρα θα είναι

$$e^{f(x)} + 2f'(x) = e^{\ln\left(\frac{2}{x+2}\right)} + 2\left(-\frac{1}{x+2}\right) = \frac{2}{x+2} - \frac{2}{x+2} = 0, \quad x \in (-2, +\infty) = D_f$$

Για να ορίζεται η f θα πρέπει $\frac{2}{x+2} > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$.

Γ) Η ανισότητα γράφεται

$$-\frac{3}{(x+2)^2} > x\left(-\frac{1}{x+2}\right) \Leftrightarrow -\frac{3}{(x+2)^2} + \frac{x}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+2)^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0$$

Πρέπει $x < -3$ ή $x > 1$ και $x > -2$. Άρα θα είναι $x > 1$.

Δ) Με απευθείας αντικατάσταση, έχουμε απροσδιόριστο $(+\infty \cdot 0)$

Είναι $g(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x+3}{(x+2)^2}$ Άρα θα είναι

$$g(x)[1 - \sigma\upsilon\nu(2x+4)] = \frac{x+3}{(x+2)^2} [1 - \sigma\upsilon\nu 2(x+2)] =$$

$$= \frac{x+3}{(x+2)^2} [1 - [1 - 2\eta\mu^2(x+2)]] = \frac{x+3}{(x+2)^2} \cdot 2\eta\mu^2(x+2) =$$

$$= 2(x+3) \cdot \frac{\eta\mu^2(x+2)}{(x+2)^2} = 2(x+3) \cdot \left[\frac{\eta\mu(x+2)}{x+2}\right]^2$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) \cdot [1 - \sigma\upsilon\nu(2x+4)] = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2(x+3) \cdot \left[\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\eta\mu(x+2)}{x+2}\right]^2 =$

$$= 2(-2+3) \cdot 1^2 = 2 \cdot 1 = 2.$$



ΘΕΜΑ 3ο

α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \neq 0$, να αποδείξετε ότι συνάρτηση $g(x) = |x| \cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 12

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \neq 0$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = |x - x_0| \cdot f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν ισχύει ότι $f(x_0) \neq 0$.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η): $x_0 > 0$. Τότε $|x_0| = x_0$ και αν $x \rightarrow x_0$, $x > 0$ και $|x| = x$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x|f(x) - |x_0|f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x) - x_0f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x) - x_0f(x) + x_0f(x) - x_0f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x) - x_0f(x)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0f(x) - x_0f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f(x)}{x - x_0} + \\ &+ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f(x_0) + x_0 f'(x_0) = g'(x_0). \text{ (Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη, άρα} \\ &\text{και συνεχής στο } x_0 \text{ .} \end{aligned}$$

2^η): $x_0 < 0$. Τότε $|x_0| = -x_0$ και όταν $x \rightarrow x_0$, $x < 0$ και $|x| = -x$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x|f(x) - |x_0|f(x_0)}{x - x_0} =$$



$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-xf(x) + x_0f(x_0)}{x - x_0} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x) - x_0f(x_0)}{x - x_0} = \dots$$

$$\dots = -f(x_0) - x_0f'(x_0) = g'(x_0) \text{ (Όμοια με την πρώτη περίπτωση).}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

$$\begin{aligned} \beta) \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{|x - x_0|f(x) - 0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{(x - x_0)f(x)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{|x - x_0|f(x) - 0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{-(x - x_0)f(x)}{x - x_0} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -f(x_0) \quad (2) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) και την υπόθεση $f(x_0) \neq 0$ έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .



ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R}^* συναρτήσεις και f και g για τις οποίες ισχύουν $f(x) = x \cdot g\left(\frac{1}{x}\right)$, για κάθε $x \neq 0$ και η ευθεία με εξίσωση $2x - y + 3 = 0$, είναι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $A(1, g(1))$.

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f , όταν $x = 1$.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $B(1, f(1))$.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Ζητάμε το $f'(1)$. $f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) + xg'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}g'\left(\frac{1}{x}\right)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(1, g(1))$ είναι

$y = g'(1)x + g(1) - g'(1)$. Αφού η εξίσωση αυτή δίνεται ως

$y = 2x + 3$, θα πρέπει

$g'(1) = 2$ και $g(1) - g'(1) = 3 \Rightarrow g(1) - 2 = 3 \Rightarrow g(1) = 5$ Άρα

$f'(1) = g(1) - g'(1) = 5 - 2 = 3$. Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f

όταν $x = 1$, είναι ίσος με 3.

β) Είναι $f(1) = g(1) = 5$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο

σημείο $B(1, f(1))$ είναι: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 5 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2$