1ο Διαγώνισμα (Μιγαδικοί αριθμοί)

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω z, w δυο μιγαδικοί αριθμοί με $w=(1-\sqrt{3}i)z$. Αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η ημιευθεία $y=\sqrt{3}x$ *με* $x>0$ τότε:

α) Βρείτε το σύνολο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 10

β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ με $\text{O}(0,0)$, $\text{A}=\text{M}(w)$ και $\text{B}=\text{M}(z)$ είναι ορθογώνιο για κάθε θέση των εικόνων των z *και* w.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Αφού οι εικόνες του w βρίσκονται πάνω στην ημιευθεία

$y=\sqrt{3}x$, *με* $x>0$ ο W θα έχει μορφή

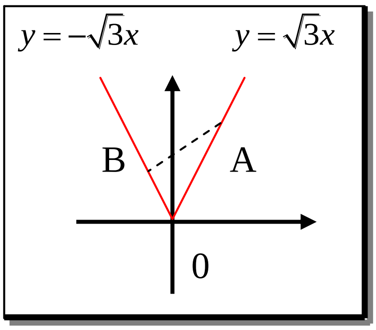
$w=x+yi=x+\sqrt{3}xi$, $x>0$. Άρα

$$x+\sqrt{3}xi=\left(1-\sqrt{3}i\right)z \Rightarrow z=\frac{x\left(1+\sqrt{3}i\right)}{1-\sqrt{3}i}=x\left[\frac{-2}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{4}i\right]=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}xi$$

$x>0$

Άρα οι εικόνες του Z είναι τα σημεία $\text{B}\left(-\frac{1}{2}x,\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$, *με* $x>0$

Αφού $\dfrac{y}{x}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{-\frac{1}{2}x}\Rightarrow y=-\sqrt{3}x$, $x>0$



Άρα οι εικόνες του Z βρίσκονται στην ημιευθεία με εξίσωση $y=-\sqrt{3}x$, $x<0$.

Οι Ασκήσεις των Διαγωνισμάτων είναι από το Βιβλίο «Τράπεζα Πρότυπων Διαγωνισμάτων – Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ’ Λυκείου – Γιάννης Μοσχονάς (www.moschonas.gr)»

β) Οι εικόνες του W είναι τα σημεία $\mathrm{A}\left(x,\sqrt{3}x\right)$, $x>0$.Άρα

$$|\mathrm{OA}|^2 = x^2 + \left(\sqrt{3}x\right)^2 = x^2 + 3x^2 = 4x^2$$

$$|\mathrm{OB}|^2 = \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^2 = x^2$$

$$|\mathrm{AB}|^2 = \left(x + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = \frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^2 = 3x^2$$

Αφού $4x^2 = x^2 + 3x^2 \Leftrightarrow |\mathrm{OA}|^2 = |\mathrm{OB}|^2 + |\mathrm{AB}|^2$, από αντίστροφο πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{B} = 90^\circ$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(z) = z\left(\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right)$ $\quad z \neq 0$

α) Αποδείξτε ότι $f\left(\bar{z}\right) = \overline{f(z)}$

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι ισχύει :

$$\frac{1}{z} f\left(z\right) + z\, f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$, για κάθε $z \neq 0$

Μονάδες 9

γ) Αποδείξτε την ισοδυναμία:

Η σχέση $f\left(z \cdot \bar{z}\right) = 0$ ισχύει αν και μόνο αν οι εικόνες των μιγαδικών $z \neq 0$, βρίσκονται πάνω στον κύκλο με εξίσωση $C: x^2 + y^2 = 1$.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(z) = z\left(\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right)$.Άρα $f\left(\bar{z}\right) = \bar{z}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ και $\overline{f(z)} = \bar{z}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

Άρα $f\left(\bar{z}\right) = \overline{f(z)}$.

β) $\frac{1}{z} f(z) + z f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} z\left(\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right) + z\frac{1}{z}\left(\frac{1}{\bar{z}} - \bar{z}\right) = \bar{z} - \frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}} - \bar{z} = 0$

γ) $f\left(z\bar{z}\right) = 0 \Leftrightarrow z\bar{z}\left(z\bar{z} - \frac{1}{z\bar{z}}\right) = 0 \Leftrightarrow z\bar{z}z\bar{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow |z|^2|z|^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^4 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 , z_3 με $z_1 i = \mathrm{Im}(z_2) = -3$,
$|z_2| = 5$ $\kappa\alpha\iota$ $z_3 = \overline{z_2}$

Αν Α , Β , Γ , είναι οι εικόνες των z_1 , z_2 , z_3 αντίστοιχα , στο μιγαδικό επίπεδο , τότε:

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 , z_3 .

Μονάδες 12

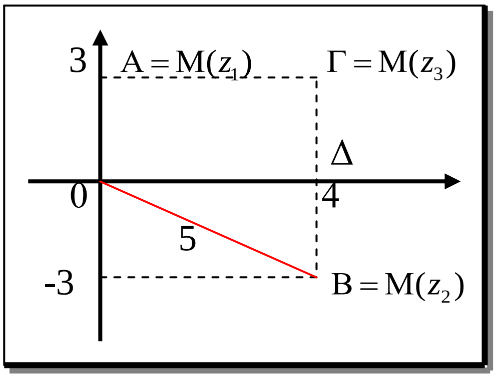
β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Αφού $z_1 i = -3$ ο z_1 θα είναι φανταστικός αριθμός και αν $z = \beta i$ τότε $\beta i i = -3 \Rightarrow \beta i^2 = -3 \Rightarrow -\beta = -3 \Rightarrow \beta = 3$. Άρα $z_1 = 3i$

Αφού $\mathrm{Im}(z_2) = -3$ $\kappa\alpha\iota$ $z_3 = \overline{z_2}$ και δεδομένης της συμμετρίας των εικόνων των συζυγών ως προς τον άξονα χ΄χ , έχουμε τις θέσεις των Α , Β , Γ στο διπλανό σχήμα. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΔ και το πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε:



$(\mathrm{O\Delta})^2 = (\mathrm{OM})^2 - (\mathrm{M\Delta})^2 = |z_2|^2 - |\mathrm{Im}(z_2)|^2 =$
$= 5^2 - 3^2 25 - 9 = 16$. Άρα (ΟΔ)= 4 και

$\mathrm{Re}(z_2)=\mathrm{Re}(z_3)=4$. Άρα $z_1=3i$, $z_2=4-3i$, $z_3=4+3i$.

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\Gamma=90^\circ$. Άρα θα ισχύει

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}(\mathrm{A\Gamma})\cdot(\mathrm{\Gamma B})=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12\ \tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2-3z+6=0$.

α) Να βρείτε την απόσταση των εικόνων των z_1, z_2 .

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\Sigma=\left|z_1^{\,2}+z_2^{\,2}\right|+\left|z_1^{\,2}-z_2^{\,2}\right|^2$$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Αφού $\Delta=(-3)^2-4\cdot 6=-15<0$ η εξίσωση θα έχει δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $z_{1,2}=\frac{3\pm i\sqrt{15}}{2}$. Η απόσταση των εικόνων τους είναι:

$$|z_1-z_2|=\left|\frac{3+i\sqrt{15}}{2}-\frac{3-i\sqrt{15}}{2}\right|=\left|\frac{3+i\sqrt{15}-3+i\sqrt{15}}{2}\right|=\left|i\sqrt{15}\right|=$$

$$=|i|\left|\sqrt{15}\right|=1\cdot\sqrt{15}=\sqrt{15}\ .$$

β) Ισχύουν οι τύποι του Vieta: $z_1+z_2=-\frac{\beta}{\alpha}=3$ $\kappa\alpha\iota$ $z_1\cdot z_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{6}{1}=6$

Άρα $z_1^{\,2}+z_2^{\,2}=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=3^2-2\cdot 6=-3$. Επίσης

$z_1^{\,2}-z_2^{\,2}=(z_1+z_2)(z_1-z_2)=3\cdot i\sqrt{15}$. Άρα θα είναι

$$\Sigma=|-3|+\left|3\cdot i\sqrt{15}\right|^2=3+9|i|^2\left|\sqrt{15}\right|^2=3+9\cdot 15=138$$