1ο Διαγώνισμα
(Ολοκληρωτικός Λογισμός)

Διάρκεια: $2\frac{1}{2}$ ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

α) Αν ισχύει η σχέση $\int \lambda x^{\kappa} dx = kx^{\lambda}\, , x \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε τις τιμές των κ $\kappa\alpha\iota$ λ.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν
$\int [e^{f(x)} \cdot f'(x) - 2x] dx = x^{2004} + 1\, , x \in \mathbb{R}$ και $O(0,0) \in C_f$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) $\int \lambda x^{\kappa} dx = \kappa x^{\lambda} \Rightarrow \lambda \int x^{\kappa}\, dx = \kappa x^{\lambda} \Rightarrow \lambda \dfrac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} + c = \kappa x^{\lambda}$. Για $x=0$

είναι $0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$. Άρα $\lambda \dfrac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} = \kappa x^{\lambda}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα πρέπει $\dfrac{\lambda}{\kappa+1} = \kappa$ $\kappa\alpha\iota$ $\kappa + 1 = \lambda$.

Αν $\lambda \neq 0$ είναι $\dfrac{\lambda}{\lambda} = \kappa \Rightarrow (\kappa = 1\, ,\, \lambda = 2)$. Αν $\lambda = 0$ τότε $\kappa = 0$.

β) $\int \left[e^{f(x)} f'(x) - 2x\right] dx = x^{2004} + 1 \Rightarrow \int \left[\left(e^{f(x)}\right)' - \left(x^2\right)'\right] dx = x^{2004} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \left[e^{f(x)} - x^2\right]' dx = x^{2004} + 1 \Rightarrow e^{f(x)} - x^2 + c = x^{2004} + 1$, (1)

Αφού το $O(0,0) \in C_f$ ισχύει $f(0) = 0$. Η σχέση (1) για $x = 0$ γίνεται
$e^{f(0)} - 0^2 + c = 0^{2004} + 1 \Rightarrow 1 + c = 1 \Rightarrow c = 0$.

Άρα $e^{f(x)} - x^2 = x^{2004} + 1 \Rightarrow e^{f(x)} = x^{2004} + x^2 + 1 \Rightarrow$
$\ln e^{f(x)} = \ln\left(x^{2004} + x^2 + 1\right) \Rightarrow f(x) = \ln\left(x^{2004} + x^2 + 1\right)$, $x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι $\int \frac{1}{x} f(\ln x)dx = \int f(u)du$ όπου $u = \ln x$

Μονάδες 9

β) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\eta\mu(2\ln x)}{x + x\eta\mu^2(\ln x)}dx$$

Μονάδες 16

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $u = \ln x$ και έχουμε $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$. Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται: $\int \frac{1}{x} f(\ln x)dx = \int f(u)du$

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu^2 x}$. Η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών . Άρα $\int f(x)dx = \int \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu^2 x}dx$, (1)

Θέτουμε $1+\eta\mu^2 x = u \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow du = \eta\mu 2x\,dx$.

Η (1) γράφεται: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{u}du = \ln u + c = \ln\left(1+\eta\mu^2 x\right) + c$, (2)

$$\int \frac{\eta\mu(2\ln x)}{x + x\eta\mu^2(\ln x)}dx = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{\eta\mu(2\ln x)}{1+\eta\mu^2(\ln x)}dx = \int \frac{1}{x} f(\ln x)dx = \int f(u)du$$

(όπου u = lnx σύμφωνα με το ερώτημα (α)) . Από τη σχέση (2) είναι $\int f(u)du = \ln\left(1+\eta\mu^2 u\right) + c = \ln\left[1+\eta\mu^2(\ln x)\right] + c$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ με συνεχή παράγωγο και $G(x)$ παράγουσα της f για την οποία ισχύουν:

$G(x)=\int\frac{f'(x)}{x^2+1}dx$ και η ευθεία $y=x+2$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της G στο σημείο της $\mathrm{A}(0,G(0))$.

α) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 5

γ) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f;

Μονάδες 5

δ) Αποδείξτε ότι η G είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $\mathbb{R}$ και

αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{G(x)}{2}>G'(0)$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Αφού η ευθεία $y=x+2$ είναι η εφαπτομένη της C_G στο $\mathrm{A}(0,G(0))$ θα ισχύει: $y-G(0)=G'(0)(x-0)\Rightarrow y=G'(0)x+G(0)$. Άρα θα είναι $G'(0)=1$ *και* $G(0)=2$. Αφού η G είναι παράγουσα της f, θα ισχύει: $G'(x)=f(x)$, (1) . Άρα θα είναι $f(0)=G'(0)=1$.

Επίσης $G(x)=\int\frac{f'(x)}{x^2+1}dx\Rightarrow G'(x)=\frac{f'(x)}{x^2+1}$, (2)

Για $x=0$ είναι $G'(0)=f'(0)=1$. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$f(x)=\frac{f'(x)}{x^2+1}\underset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}\frac{f'(x)}{f(x)}=x^2+1\Leftrightarrow[\ln f(x)]'=x^2+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int[\ln f(x)]'\,dx=\int\left(x^2+1\right)dx\Rightarrow\ln f(x)=\frac{x^3}{3}+x+c$$

Για $x=0$ είναι $\ln f(0)=c\Rightarrow\ln 1=c\Rightarrow c=0$.

Άρα είναι $\ln f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x \Rightarrow e^{\ln f(x)} = e^{\frac{x^3}{3}+x} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{x^3}{3}+x}$

β) Αφού είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$. Άρα η y = 0 , δηλαδή ο άξονας χ΄χ , είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f όταν $x \to -\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^3}{3}+x} = e^{+\infty} = +\infty$. Από ερώτημα (β) είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής .

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$.

δ) Είναι $G'(x) = f(x) = e^{\frac{x^3}{3}+x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Θα έχουμε

$$G''(x) = \left(e^{\frac{x^3}{3}+x}\right)' = e^{\frac{x^3}{3}+x}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)' = e^{\frac{x^3}{3}+x}(x^2+1) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Άρα η G είναι κυρτή στο $x \in \mathbb{R}$.

Αφού η G είναι γνησίως αύξουσα , θα ισχύει η σχέση:

$$x > 0 \Rightarrow G(x) > G(0)$$

Είναι όμως $G(0) = 2$. Άρα θα έχουμε

$G(x) > 2$, για κάθε $x > 2$. Όμως $G'(0) = 1$. Άρα θα είναι

$\dfrac{G(x)}{2} > 1 \Rightarrow \dfrac{G(x)}{2} > G'(0)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α , β], να αποδείξετε

ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\,f(x) + f(\alpha+\beta-x)]\,dx$

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^e \frac{2004^x}{2004^x + 2004^{1+e-x}}\,dx$$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να δείξουμε ότι $2\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta [\,f(x) + f(\alpha+\beta-x)]\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$.

Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$, αν θέσουμε όπου

$\alpha+\beta-x = u \quad \mu\varepsilon \quad \frac{du}{dx} = -1$ και όταν $x=\alpha \Rightarrow u=\beta$ και όταν

$x=\beta \Rightarrow u=\alpha$, γράφεται:

$\int_\beta^\alpha -f(u)\,du = -\int_\beta^\alpha f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

Άρα θα είναι $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2004^x}{2004^x + 2004^{1+e-x}}$. Προφανώς η f είναι συνεχής στο διάστημα [1 , e] , ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Σύμφωνα με το ερώτημα (α) , το ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{2004^x}{2004^x + 2004^{1+e-x}}\,dx$

γράφεται: $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e [\,f(x) + f(1+e-x)]\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_1^e \left[\frac{2004^x}{2004^x + 2004^{1+e-x}} + \frac{2004^{1+e-x}}{2004^{1+e-x} + 2004^x}\right]dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{e}\frac{2004^{x}+2004^{1+e-x}}{2004^{x}+2004^{1+e-x}}dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{e}1dx=\frac{1}{2}[x]_{1}^{e}=\frac{1}{2}(e-1).$$