1ο Διαγώνισμα (Όριο-Συνέχεια Συνάρτησης)

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} -2005^{\ln x}+\alpha\ln x+\alpha^2e^{x-e} & ,0<x\le e \\ -\dfrac{2003x}{\sqrt{e^2x-e^3+e^2}} & ,\quad x>e \end{cases}$$

Α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής.

Μονάδες 15

Β) Για τη μεγαλύτερη τιμή του α που βρήκατε στο ερώτημα (Α) , να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Sigma=\frac{\alpha e-e^e\left[f(1)-f(e)\right]}{e^e}-2$$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

Α) Για να είναι η f συνεχής , αρκεί να είναι συνεχής στο $x_0=e$.Αρκεί και πρέπει $\lim_{x\to e}f(x)=f(e)$. $f(e)=-2005^{\ln e}+\alpha\ln e+\alpha^2e^0=-2005+\alpha+\alpha^2$

$$\lim_{x\to e^-}f(x)=\lim_{x\to e^-}\left[-2005^{\ln x}+\alpha\ln x+\alpha^2e^{x-e}\right]=-2005+\alpha+\alpha^2$$

$$\lim_{x\to e^+}f(x)=\lim_{x\to e^+}\left(-\frac{2003x}{\sqrt{e^2x-e^3+e^2}}\right)=-\frac{2003e}{\sqrt{e^2}}=-\frac{2003e}{e}=-2003$$

Πρέπει $\lim_{x\to e^-}f(x)=\lim_{x\to e^+}f(x)\Leftrightarrow-2005+\alpha+\alpha^2=-2003\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha-2=0$

Λύνοντας την εξίσωση παίρνουμε $\alpha=1\quad\kappa\alpha\iota\quad\alpha=-2$.

Β) Έτσι για $\alpha=1$ (η μεγαλύτερη τιμή του α) θα έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} -2005^{\ln x}+\ln x+e^{x-e} & , \quad 0<x\le e \\ -\dfrac{2003x}{\sqrt{e^2x-e^3+e^2}} & , \quad x>e \end{cases}$$

$$f(1)=-2005^{ln1}+\ln 1+e^{1-e}=-2005^0+0+e^{1-e}=-1+e^{1-e}$$

$$f(e)=-2005^{\ln e}+\ln e+e^{e-e}=-2005+1+1=-2003$$

Άρα $A=\dfrac{e-e^e\left[-1+e^{1-e}+2003\right]}{e^e}-2=\dfrac{e+e^e-e-2003e^e}{e^e}-2=$

$$=\frac{e^e(1-2003)}{e^e}-2=-2002-2=-2004.$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\left(x-1\right)f(x)=\eta\mu(3x-3)-x+x^2 \quad , \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\left[\left(x^2-1\right)f(x)+f(3x^2-2)+2000\right]$$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Όταν $x \neq 1$ τότε $\dfrac{(x-1)f(x)}{x-1} = \dfrac{\eta\mu(3x-3)}{x-1} + \dfrac{x^2-x}{x-1}$. Άρα θα είναι

$$f(x) = \frac{\eta\mu[3(x-1)]}{x-1} + \frac{x(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = 3\frac{\eta\mu[3(x-1)]}{3(x-1)} + x$$

Αφού η είναι συνεχής στο ℝ, θα ορίζεται και για $x=1$ και θα ισχύει: $f(1) = \lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{3\eta\mu[3(x-1)]}{3(x-1)} + x\right] =$

$= 3\lim\limits_{x-1\to0}\dfrac{\eta\mu[3(x-1)]}{3(x-1)} + \lim\limits_{x\to1} x = 3\cdot1+1=4$. Άρα ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\eta\mu[3(x-1)]}{3(x-1)} + x & , \ x \neq 1 \\ 4 & , \ x = 1 \end{cases}$$

β) Είναι $f\left(3x^2-2\right) = 3\dfrac{\eta\mu\left[3\left(3x^2-3\right)\right]}{3\left(3x^2-3\right)} + 3x^2 - 2$

Άρα $\lim\limits_{x\to1}\left[\left(x^2-1\right)f(x) + f\left(3x^2-2\right) + 2000\right] =$

$$= \lim_{x\to1}\left[\left(x^2-1\right)\left(\frac{3\eta\mu[3(x-1)]}{3(x-1)} + x\right) + \frac{3\eta\mu\left[3\left(3x^2-3\right)\right]}{3\left(3x^2-3\right)} + 3x^2 - 2 + 2000\right] =$$

$$= \lim_{x\to1}(x^2-1)\cdot 3\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu[3(x-1)]}{3(x-1)} + \lim_{x\to1}[(x^2-1)x] +$$

$$+3\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu\left[3\left(3x^2-3\right)\right]}{3\left(3x^2-3\right)} + \lim_{x\to1}\left(3x^2-2\right) + 2000 =$$

$$= 0\cdot3\cdot1 + 0\cdot1 + 3\cdot1 + 1 + 2000 = 3 + 1 + 2000 = 2004.$$

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-1 \quad , \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι

α) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, τότε η f θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 12

β) Αν η f είναι συνεχής σε οποιοδήποτε σημείο $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε η f θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Η σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)-1$ για $x=y=0$, γράφεται: $f(0)=f(0)+f(0)-1 \Rightarrow f(0)=1$. Αφού η f είναι συνεχής στο 0 θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$. Από τη δοσμένη σχέση για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)=f\left[(x-x_0)+x_0\right]=f(x-x_0)+f(x_0)-1$. Άρα θα είναι

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x-x_0)+\lim_{x\to x_0} f(x_0)-1=\lim_{x-x_0\to 0} f(x-x_0)+f(x_0)-1=$$

$$=\lim_{u\to 0} f(u)+f(x_0)-1=f(0)+f(x_0)-1=1+f(x_0)-1=f(x_0)$$ αφού η f είναι συνεχής στο 0 . (Όπου $u=x-x_0$)

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\alpha\in\mathbb{R}$.Τότε θα ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$. Επίσης θα έχουμε

$$f(x)=f\left[(x-\alpha)+\alpha\right]=f(x-\alpha)+f(\alpha)-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x-\alpha)=f(x)-f(\alpha)+1$$.Έτσι θα είναι

$$\lim_{x\to\alpha} f(x-\alpha)=\lim_{x\to\alpha} f(x)-f(\alpha)+1=f(\alpha)-f(\alpha)+1=1=f(0)$$

(Η f είναι συνεχής στο α).

Άρα $\lim\limits_{x-\alpha\to 0} f(x-\alpha)=f(0)\Rightarrow \lim\limits_{u\to 0} f(u)=f(0)$ (όπου $u=x-\alpha$)

Άρα η f θα είναι συνεχής στο 0 και συνεπώς , λόγω του ερωτήματος (α) θα είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Αν για τις συναρτήσεις f , g ισχύουν

$\left|f(x)-g(x)\right| \le (x-\lambda)^2 \left|g(x)\right|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$\lim\limits_{x\to\lambda} g(x) = 2004$ να βρείτε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x)$ **Μονάδες 10**

β) $\lim\limits_{x\to\lambda} \dfrac{f(x)-g(x)}{x-\lambda}$ **Μονάδες 15**

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\left|f(x)-g(x)\right| \le (x-\lambda)^2 \left|g(x)\right| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -(x-\lambda)^2\left|g(x)\right| \le f(x)-g(x) \le (x-\lambda)^2\left|g(x)\right|$$

Όμως $\lim\limits_{x\to\lambda}\left[-(x-\lambda)^2\left|g(x)\right|\right] = \lim\limits_{x\to\lambda}\left[-(x-\lambda)\right]^2 \left|\lim\limits_{x\to\lambda} g(x)\right| = 0\left|2004\right| = 0$

Επίσης $\lim\limits_{x\to\lambda}\left[(x-\lambda)^2\left|g(x)\right|\right] = \lim\limits_{x\to\lambda}(x-\lambda)^2 \left|\lim\limits_{x\to\lambda} g(x)\right| = 0\cdot\left|2004\right| = 0$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to\lambda}\left[f(x)-g(x)\right] = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\lambda} f(x) - \lim_{x\to\lambda} g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\lambda} f(x) = \lim_{x\to\lambda} g(x) = 2004.$$

β) Αν $x\to\lambda^+$, είναι $x>\lambda \Rightarrow x-\lambda>0 \Rightarrow x-\lambda = \left|x-\lambda\right|$. Έτσι η δοσμένη ανισότητα γράφεται

$$\frac{\left|f(x)-g(x)\right|}{\left|x-\lambda\right|} \le (x-\lambda)\left|g(x)\right| \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-g(x)}{x-\lambda}\right| \le (x-\lambda)\left|g(x)\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x-\lambda)\left|g(x)\right| \le \frac{f(x)-g(x)}{x-\lambda} \le (x-\lambda)\left|g(x)\right|$$

Όμως $\lim\limits_{x\to\lambda^+}\left[-(x-\lambda)\left|g(x)\right|\right] = 0\cdot 2004 = 0$ και

$\lim\limits_{x\to\lambda^+}\left[(x-\lambda)\left|g(x)\right|\right] = 0\cdot 2004 = 0$. Άρα από κριτήριο παρεμβολής

θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to\lambda^+}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-\lambda} = 0$ (1)

Αν $x \to \lambda^-$ είναι $x<\lambda \Rightarrow x-\lambda<0 \Rightarrow |x-\lambda| = -(x-\lambda)$. Έτσι η δοσμένη ανισότητα γράφεται:

$$\frac{|f(x)-g(x)|}{x-\lambda} \geq (x-\lambda)|g(x)| \Rightarrow \frac{|f(x)-g(x)|}{-|x-\lambda|} \geq (x-\lambda)|g(x)| \Rightarrow$$

$$\frac{|f(x)-g(x)|}{|x-\lambda|} \leq -(x-\lambda)|g(x)| \Rightarrow \left|\frac{f(x)-g(x)}{x-\lambda}\right| \leq -(x-\lambda)|g(x)| \Rightarrow$$

$$(x-\lambda)|g(x)| \leq \frac{f(x)-g(x)}{x-\lambda} \leq -(x-\lambda)|g(x)| .$$

Είναι $\lim\limits_{x \to \lambda^-}\left[(x-\lambda)|g(x)|\right] = 0 \cdot 2004 = 0$ και επίσης $\lim\limits_{x \to \lambda^-}\left[-(x-\lambda)|g(x)|\right] = 0 \cdot 2004 = 0$. Άρα από κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε την σχέση

$$\lim_{x \to \lambda^-} \frac{f(x)-g(x)}{x-\lambda} = 0 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\lim\limits_{x \to \lambda} \frac{f(x)-g(x)}{x-\lambda} = 0$.