2ο Διαγώνισμα
(Διαφορικός Λογισμός)

Διάρκεια: $2\frac{1}{2}$ ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα [α , β] με $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρεις διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί $x_1, x_2, x_3 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιοι ώστε να ισχύει η σχέση $\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2} = f'(x_3)$.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln x^{\eta\mu(\pi x)}$

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει στο διάστημα (1 , 2004) τουλάχιστον 2003 ρίζες .

Μονάδες 15

Β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \ln\frac{4}{3}$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$f(x)=\frac{e^{-f(x)}-3e^{f(x)}}{4} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Μονάδες 9

β) Αποδείξτε ότι ισχύει $-\ln\sqrt{3}<f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 16

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=1+\ln 2004$

α) Αποδείξτε ότι η f δεν μπορεί να είναι σταθερή.

Μονάδες 3

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 15

γ) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση με τύπο

$g(x)=e^{f(x)-1}-e^{x-1}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7