2ο Διαγώνισμα (Μιγαδικοί αριθμοί)

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 που συνδέονται με τις σχέσεις:
$z_2 = iz_1$ και $z_3 = iz_2$.

Α) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου που ορίζεται από τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 .

Μονάδες 8

Β) Αν είναι $z_1 = \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right)^{2004}$, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου του ερωτήματος (α).

Μονάδες 17

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $z \cdot \bar{z} + 2(z - i) = 4$

Α) Αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 που επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 10

Β) Αν $z_3 = \left(1 - \sqrt{3}\right)i$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 , z_2 , z_3 , είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου , του οποίου να βρείτε το εμβαδόν.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 - \sqrt{3}\,i$

Α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , iz , $i^2 z$ και $i^3 z$, είναι κορυφές τετραγώνου , του οποίου να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν.

Μονάδες 10

Β) Αν ισχύει η σχέση $\left(|w|^2 - 3\right)\left(|w|^2 + 3\right) = 8|w|^2$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z + w|$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(\nu) = \frac{z + i^{\nu}}{z - i^{\nu+1}} \;, \nu \in \mathbb{N} \;\; \textit{και } z \neq \pm 1 \,, \pm i$$

Α) Να αποδείξετε ότι $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) = 1$

Μονάδες 10

Β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $|f(2003)| = 1$

Μονάδες 15