



2ο Διαγώνισμα (Ολοκληρωτικός Λογισμός)

Διάρκεια: $2\frac{1}{2}$ ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο \mathbb{R} , παραγωγίσιμη στο 0 με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ και $f'(0) \neq 0$. Δίνεται επίσης και η συνάρτηση

$$g, \text{ για την οποία ισχύει: } g(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$$

α) Να αποδείξετε ότι η C_g εφάπτεται στο άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι $g''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

γ) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) = \int_0^1 f(t) dt$$

Μονάδες 7

δ) Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

A) Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 + 2003 + \int_1^x f(t) dt \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Μονάδες 15

B) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f του ερωτήματος (A), του άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 10



ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g , τέτοια ώστε

$$g(x) = \int_{\alpha}^x (x - \beta) f(t) dt. \text{ Αν η εφαπτομένη της } C_g \text{ στο σημείο}$$

$A(\beta, g(\beta))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $2004x + y - 2003 = 0$

α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $\chi\chi$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε το σημείο $A(\beta, g(\beta))$.

Μονάδες 5

γ) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\xi} f(t) dt = (\beta - \xi) f(\xi)$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\int_1^x (t - 1) f(t) dt \leq \int_x^1 f(t) dt + x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(1)$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x f(x)$, τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = f(1)$ και τον άξονα $\chi\chi$.

Μονάδες 15