



## 2ο Διαγώνισμα (Όριο-Συνέχεια Συνάρτησης)

Διάρκεια:  $2\frac{1}{2}$  ώρες

### ΘΕΜΑ 1ο

Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί με  $\alpha < \beta < \gamma$  και η συνεχής συνάρτηση  $f$  στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν

$$f(\alpha) < \beta, \quad f(\beta) > \gamma, \quad f(\gamma) < \alpha \quad \text{και} \quad f(\alpha) \neq f(\gamma)$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα από τα  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε να ισχύει

$$\xi_1 \in (\beta, \gamma) \quad \text{με} \quad f(\xi_1) = f(\alpha)$$

ή

$$\xi_2 \in (\alpha, \beta) \quad \text{με} \quad f(\xi_2) = f(\gamma)$$

Μονάδες 15

β) Αποδείξτε ότι υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \gamma)$  τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha) + 2f(\beta) + f(\gamma)}{4}$$

Μονάδες 10



## ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 3x^3 - 1$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

β) Να επιλυθεί η ανίσωση

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+3} > 3(2x+3)^3 - 3x^6$$

**Μονάδες 8**

γ) Να επιλυθεί η εξίσωση

$$2f(x) - 7 = f(0)$$

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = f(x) + \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\alpha - \beta}(x - \alpha)$

όπου  $f$ , συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha) \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$

**Μονάδες 4**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , τέτοιο

ώστε να ισχύει  $g(\xi) = 0$ .

**Μονάδες 7**

γ) Αποδείξτε ότι ισχύει  $\frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} = \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

**Μονάδες 6**

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει  $f(\alpha) \cdot g(\alpha) = g^2(\beta)$

**Μονάδες 8**



## ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1$ ,  $z_2$  και  $z$ , όπου οι εικόνες των  $z_1$  και  $z_2$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία  $A(1,2)$  και  $B(6,4)$  αντίστοιχα και η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \frac{2|z - z_1|x^3 - |2z + z_2|x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3}$$

α) Αν το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  είναι πραγματικός αριθμός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $Z$ .

**Μονάδες 9**

β) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  του ερωτήματος (α).

**Μονάδες 8**

γ) Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2004$ , να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του σημειοσυνόλου των εικόνων του μιγαδικού αριθμού  $Z$ .

**Μονάδες 8**