Διαγώνισμα (Εφ'όλης της Ύλης)

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 $\kappa\alpha\iota$ z , όπου οι εικόνες των z_1 $\kappa\alpha\iota$ z_2 στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία Α(1,2) και Β(6,4) αντίστοιχα και η συνάρτηση f με

$$f(x)=\frac{2|z-z_1|x^3-|2z+z_2|x^2-x+1}{x^3-4x+3}$$

α) Αν το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός , να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του Ζ . **Μονάδες 9**

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ του ερωτήματος (α).

Μονάδες 8

γ) Αν $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2004$, να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του σημειοσυνόλου των εικόνων του μιγαδικού αριθμού Ζ .

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-4x+3\right)=0$, για να είναι το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ πραγματικός αριθμός , θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 1}\left[2|z-z_1|x^3-|2z+z_2|x^2-x+1\right]=0$

(Διαφορετικά το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ θα είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$)

Άρα $2|z-z_1|-|2z+z_2|-1+1=0 \Leftrightarrow 2|z-z_1|=|2z+z_2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2|z-z_1|=2\left|z+\frac{z_2}{2}\right| \Leftrightarrow |z-z_1|=\left|z+\frac{z_2}{2}\right|$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z , είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ , όπου Α(1 , 2) και Γ(-3 , -2) , αφού $M_1(z_1)=A(1,2)$ και $M_2(z_2)=B(6,4)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2|z-z_1|x^3-2|z-z_1|x^2-x+1}{x^3-4x+3}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2|z-z_1|x^2(x-1)-(x-1)}{x^3-x-3x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[2|z-z_1|x^2-1\right]}{x(x^2-1)-3(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[2|z-z_1|x^2-1\right]}{x(x-1)(x+1)-3(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left[2|z-z_1|x^2-1\right]}{\cancel{(x-1)}\left[x(x+1)-3\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2|z-z_1|x^2-1}{x^2+x-3}=\frac{2|z-z_1|-1}{-1}=-2|z-z_1|+1$$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2|z-z_1|x^3}{x^3}=2|z-z_1|$. Αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2004$

θα έχουμε $2|z-z_1|=2004 \Leftrightarrow |z-z_1|=1002$. Είναι $z=x+yi$ και $z_1=1+2i$. Άρα είναι $|x+yi-1-2i|=1002 \Leftrightarrow |(x-1)+(y-2)i|=1002 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=1002 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=1002^2$.

Η τελευταία εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(1 , 2) και ακτίνα ρ= 1002 .

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f *στο* $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$$\int_1^x (t-1)\, f(t)\,dt \leq \int_x^1 f(t)\,dt + x^2-1 \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(1)$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτηση $g(x)=x\,f(x)$, τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ *και* $x=f(1)$ και τον άξονα χ΄χ .

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\int_1^x (t-1)\,f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt-x^2+1\,,\quad x\in\mathbb{R}$$

Είναι $h(x)\le 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Από την υπόθεση). Επειδή

$h(1)=\int_1^1 (t-1)\,f(t)\,dt+\int_1^1 f(t)\,dt-1+1=0$, θα ισχύει και η σχέση

$h(x)\le h(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η $h(1)$ είναι η μέγιστη τιμή της h.

Από το θεώρημα Fermat έχουμε ότι: $h'(1)=0$. Όμως είναι

$h'(x)=(x-1)\,f(x)+f(x)-2x \Leftrightarrow h'(x)=xf(x)-f(x)+f(x)-2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h'(x)=xf(x)-2x$. Για $x=1$ γίνεται: $h'(1)=f(1)-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(1)-2=0\Leftrightarrow f(1)=2$.

β) Αφού $x\,f(x)>0$ $(x>1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(x)\ge 2)$, ζητάμε το ολοκλήρωμα

$\int_1^2 x\,f(x)\,dx$. Η αρχική σχέση $\int_1^x (t-1)\,f(t)dt<\int_x^1 f(t)dt+x^2-1$

γράφεται: $\int_1^x (t-1)\,f(t)dt+\int_1^x f(t)dt\le x^2-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^x \big[(t-1)\,f(t)+f(t)\big]dt\le x^2-1\Leftrightarrow \int_1^x \big[t\,f(t)-f(t)+f(t)\big]dt\le x^2-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^x t\,f(t)\,dt\le x^2-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα για $x=2$ έχουμε

$$\int_1^2 t\,f(t)\,dt\le 2^2-1\Rightarrow \int_1^2 t\,f(t)\,dt\le 3 \qquad (1)$$

Είναι $f(x)\ge 2$ για $1\le x\le 2$, θα έχουμε

$$x\,f(x)\ge 2x\Rightarrow \int_1^2 x\,f(x)\,dx\ge \int_1^2 2x\,dx\Rightarrow \int_1^2 x\,f(x)\,dx\ge \left[x^2\right]_1^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^2 x\,f(x)\,dx\ge 4-1\Rightarrow \int_1^2 x\,f(x)\,dx\ge 3 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $\int_1^2 x\,f(x)\,dx=3$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι 3 τ.μ.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:[a,\beta] \dashrightarrow \mathbb{R}$ με α , $\beta \neq 0$, η οποία είναι συνεχής στο [α , β] , παραγωγίσιμη στο (α , β) και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(\alpha)=\frac{1}{\alpha} \quad \kappa\alpha\iota \quad f(\beta)=\frac{1}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\dfrac{x}{\alpha\beta}$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα , στο διάστημα (α , β) .

Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}$$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\dfrac{x}{\alpha\beta}$. Η g είναι συνεχής στο διάστημα [α , β] , ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και ισχύει:

$$g(\alpha)=f(\alpha)-\frac{\alpha}{\alpha\beta}=f(\alpha)-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta} \quad \text{και}$$

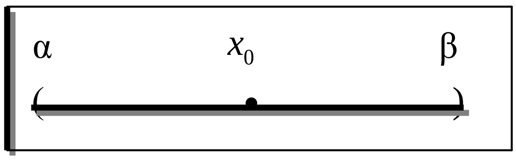
$$g(\beta)=f(\beta)-\frac{\beta}{\alpha\beta}=f(\beta)-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=-\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right).$$

Άρα ισχύει $g(\alpha)\cdot g(\beta)=-\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)^2<0$.

Άρα από θεώρημα Bolzano για την g , υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε να ισχύει: $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-\dfrac{x_0}{\alpha\beta}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{x_0}{\alpha\beta}.$$

β) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,x_0]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,x_0).



Από Θ.Μ.Τ. διαφορικού λογισμού , έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{\frac{x_0}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha}}{x_0 - \alpha} = \frac{\frac{x_0 - \beta}{\alpha\beta}}{x_0 - \alpha} = \frac{x_0 - \beta}{(x_0 - \alpha)\alpha\beta} \quad , \quad (1)$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_0, β). Από Θ.Μ.Τ. διαφορικού λογισμού , θα υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, \beta)$,τέτοιο ώστε να ισχύει: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} =$

$$= \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{x_0}{\alpha\beta}}{\beta - x_0} = \frac{\frac{\alpha - x_0}{\alpha\beta}}{\beta - x_0} = \frac{\alpha - x_0}{(\beta - x_0)\alpha\beta} \quad , \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2) = \frac{x_0 - \beta}{(x_0 - \alpha)\alpha\beta}\cdot\frac{\alpha - x_0}{(\beta - x_0)\alpha\beta} =$$

$$= \frac{-(\beta - x_0)}{-(\alpha - x_0)\alpha\beta}\cdot\frac{\alpha - x_0}{(\beta - x_0)\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\,.$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\alpha\int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{x+\beta}{\alpha}} e^{-\alpha t+\beta} f(x-\alpha t+\beta)\,dt$

με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

Μονάδες 9

β) Αποδείξτε ότι η f έχει δυο τοπικά ακρότατα και ένα σημείο καμπής και να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου καμπής.

Μονάδες 5

γ) Αποδείξτε ότι η C_f τέμνει τουλάχιστον μια φορά τον πραγματικό άξονα .

Μονάδες 3

δ) i) Αν η ευθεία $\varepsilon: y=13x-6$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α(1,7) , να υπολογίσετε τις τιμές των α και β .

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f την ευθεία $\varepsilon: y=13x-6$ και τον άξονα y′y .

Μονάδες 4

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $u=x-\alpha t+\beta \Rightarrow \alpha t=x+\beta-u \Rightarrow t=\dfrac{x+\beta-u}{\alpha}$.

Είναι $\dfrac{du}{dt}=-\alpha \Rightarrow dt=-\dfrac{1}{\alpha}du$.

Όταν $t=\dfrac{\beta}{\alpha}$ τότε $u=x-\alpha\dfrac{\beta}{\alpha}+\beta=x \Rightarrow u=x$.

Όταν $t=\dfrac{x+\beta}{\alpha}$ τότε $u=x-\alpha\left(\dfrac{x+\beta}{\alpha}\right)+\beta=x-x-\beta+\beta=0 \Rightarrow u=0$

Άρα $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\alpha\int_x^0 e^{-\alpha\frac{x+\beta-u}{\alpha}+\beta} f(u)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)du=$

$=\alpha x^2+\beta x-\int_x^0 e^{-x-\beta+u+\beta} f(u)\,du=\alpha x^2+\beta x-\int_x^0 e^{u-x} f(u)\,du=$

$=\alpha x^2+\beta x+\int_0^x e^{-x}e^u\ f(u)\,du=\alpha x^2+\beta x+e^{-x}\int_0^x e^u\ f(u)\,du$.

Δηλαδή είναι $f(x)=\alpha x^2+\beta x+e^{-x}\int_0^x e^u f(u)\,du$, (1)

Η (1) γράφεται ισοδύναμα: $e^x f(x)=e^x\left(\alpha x^2+\beta x\right)+\int_0^x e^u f(u)\,du$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε

$\cancel{e^x f(x)}+e^x f'(x)=e^x\left(\alpha x^2+\beta x\right)+e^x\left(2\alpha x+\beta\right)+\cancel{e^x f(x)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x f'(x)=e^x\left(\alpha x^2+\beta x\right)+e^x\left(2\alpha x+\beta\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\cancel{e^x}\left[\alpha x^2+\beta x+2\alpha x+\beta\right]}{\cancel{e^x}}\Leftrightarrow f'(x)=\alpha x^2+(2\alpha+\beta)x+\beta$

Άρα είναι $f(x)=\frac{\alpha}{3}x^3+\frac{2\alpha+\beta}{2}x^2+\beta x+c$.

Από τη σχέση (1) για $x=0$ έχουμε:

$f(0)=\alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+e^0\int_0^0 e^u f(u)\,du=0$. Άρα $c=0$, άρα ο τύπος

της f είναι: $f(x)=\frac{\alpha}{3}x^3+\frac{2\alpha+\beta}{2}x^2+\beta x$.

β) Η εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow\alpha x^2+(2\alpha+\beta)x+\beta=0$, έχει πάντα δυο λύσεις , αφού είναι $\Delta=(2\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta-4\alpha\beta=$

$=4\alpha^2+\beta^2>0$, $\left(\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*\right)$. Επειδή αλλάζει το πρόσημο του τριωνύμου εντός και εκτός των ριζών , οι ρίζες της $f'(x)=0$, είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .Επίσης $f''(x)=2\alpha x+2\alpha+\beta$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow 2\alpha x=-2\alpha-\beta\Leftrightarrow x=-1-\frac{\beta}{2\alpha}$

$f''(x)>0\Leftrightarrow x>-1-\frac{\beta}{2\alpha}$ και $f''(x)<0\Leftrightarrow x<-1-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Άρα η f έχει σημείο καμπής στη θέση $x=-1-\frac{\beta}{2\alpha}$.

γ) Η f ως $3^{ου}$: βαθμού πολυώνυμο, τέμνει τουλάχιστον μια φορά τον χ΄χ άξονα . Εξ' άλλου αφού $f(0)=0$ τον τέμνει στο σημείο Ο(0,0) .

δ) i) Είναι $f(x)=\dfrac{\alpha}{3}x^3+\dfrac{2\alpha+\beta}{2}x^2+\beta x$. Αφού η $y=13x-6$ είναι η εφαπτομένη της C_f $\sigma\tau o$ $A(1,7)$, θα ισχύουν:

$f'(1)=13$ $\kappa\alpha\iota$ $f(1)=7$ και αφού $f'(x)=\alpha x^2+(2\alpha+\beta)x+\beta$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=13 \Leftrightarrow \alpha+2\alpha+\beta+\beta=13 \Leftrightarrow 3\alpha+2\beta=13 \\ f(1)=7 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{2\alpha+\beta}{2}+\beta=7 \Leftrightarrow 8\alpha+9\beta=42 \end{array}\right\}$$

Επιλύουμε το σύστημα των δυο παραπάνω εξισώσεων πολλ/ζοντας την πρώτη επί -2 και τη δεύτερη επί 9 θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} -16\alpha-18\beta=-84 \\ 27\alpha+18\beta=117 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha=3 \\ \beta=2 \end{array}\right\}$$

ii) Άρα είναι $f(x)=x^3+4x^2+2x$. Για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και (ε) , λύνουμε την εξίσωση $f(x)=13x-6 \Leftrightarrow$

1	4	-11	6	1
	1	5	-6	
1	5	-6	0	

$\Leftrightarrow x^3+4x^2+2x=13x-6 \Leftrightarrow x^3+4x^2-11x+6=0$

Από σχήμα Horner αφού το 1 είναι προφανής ρίζα

η εξίσωση θα γράφεται ισοδύναμα: $(x-1)(x^2+5x-6)=0$. Η εξίσωση $x^2+5x-6=0$ έχει Δ= 49 και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-6 \\ x_2=1 \end{cases}$

Στον διπλανό πίνακα προσήμου της $f(x)-(13x-6)$ παρατηρούμε ότι για $x>0$ η C_f είναι «πάνω» από την (ε) αφού ισχύει $f(x)-(13x-6)>0$.

x		-6		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^2+5x-6	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)-(13x-6)$	$-$		$+$		$+$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 [f(x)-(13x-6)]dx = \int_0^1 \left(x^3+4x^2-11x+6\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3-\frac{11}{2}x^2+6x\right]_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{11}{2}+6 =$$

$$= \frac{3}{12}+\frac{16}{12}-\frac{66}{12}+\frac{72}{12}=\frac{25}{12} \quad \tau.\mu.$$