

Θέμα 1^ο

A. Θεωρία

B. Θεωρία

Γ. $\alpha \rightarrow \Lambda$ $\beta \rightarrow \Lambda$ $\gamma \rightarrow \Sigma$ $\delta \rightarrow \Sigma$ $\epsilon \rightarrow \Sigma$

Θέμα 2^ο

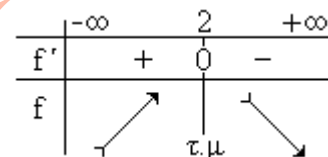
α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \frac{x-1}{e^x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = \frac{e^x - (x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2-x)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}.$

Επομένως: $e^x f'(x) = e^x \frac{2-x}{e^x} = 2-x.$

γ. Η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γν. φθίνουσα στο $[2, +\infty)$, επομένως παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο

$x_0 = 2$, το $f(2) = \frac{1}{e^2}.$



Θέμα 3^ο

α. $\bar{x}_A = \frac{20 + 26 + 24 + 22 + 18}{5} = 22$ χιλ. ώρες

$\bar{x}_B = \frac{26 + 32 + 19 + 20 + 23}{5} = 24$ χιλ. ώρες.

β. Το μέσο κόστος ανά χιλιάδα ωρών και ανά τύπο μπαταρίας είναι:

για τον τύπο A: $\frac{38}{22} \approx 1,73$ €/χιλ. ώρες

για τον τύπο B: $\frac{40}{24} \approx 1,66$ €/χιλ. ώρες

Άρα συμφέρει ο τύπος B.

γ. $S_A^2 = \frac{(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2}{5} = 8(\text{χιλ. ώρες})^2$

Επομένως $S_A = 2\sqrt{2}$ (χιλ. ώρες)

$S_B^2 = \frac{(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2}{5} = 22(\text{χιλ. ώρες})^2$

Επομένως $S_B = \sqrt{22}$ (χιλ. ώρες)

$$\delta. CV_A = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}, \quad CV_B = \frac{\sqrt{22}}{24}, \quad \text{άρα } \frac{CV_A}{CV_B} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{11}}{\frac{\sqrt{22}}{24}} = \frac{24}{11\sqrt{11}} \approx \frac{24}{11 \cdot 3,3} < 1$$

Επομένως $CV_A < CV_B$, δηλαδή μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει το δείγμα Α.



Ο Μαθηματικός όλων των μαθητών

Θέμα 4^ο

Έστω τα ενδεχόμενα:

A: «διαβάζουν εφημερίδα α» και B: «διαβάζουν εφημερίδα β»

Τότε $P(A) = 0,5$ και $P(A - B) = 0,3$.

α. Έστω το ενδεχόμενο K: «δεν διαβάζει α ή διαβάζει β», τότε

$$K = (A - B)' = A' \cup B$$

$$\text{άρα } P(K) = 1 - P(A - B) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

β. $B \subseteq K$, άρα $P(B) \leq P(K) \Leftrightarrow P(B) \leq \frac{7}{10}$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2$$

$$A \cap B \subseteq B \text{ άρα } P(A \cap B) \leq P(B) \Leftrightarrow P(B) \geq 0,2 \Leftrightarrow P(B) \geq \frac{1}{5}$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$$

γ. $f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$

$$\Delta = 1 - 12P(B), \text{ αλλά } P(B) \geq \frac{1}{5} > \frac{1}{12}, \text{ δηλ. } P(B) > \frac{1}{12} \Leftrightarrow 1 - 12P(B) < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0,$$

οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} άρα δεν έχει ακρότατα