Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής

Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Τρίτη 24 Μαΐου 2008

Θέμα 1ο

Α1. Θεωρία σελ. 235 σχ. βιβλίου

Α2. Θεωρία σελ. 191 σχ. βιβλίου

Β. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

Θέμα 2ο

α) Είναι $\left|i+2\sqrt{2}\right|\cdot|z|=6 \Leftrightarrow \sqrt{1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}\cdot|z|=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{9}\cdot|z|=6 \Leftrightarrow |z|=2$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(0 , 0) και ακτίνα ρ = 2

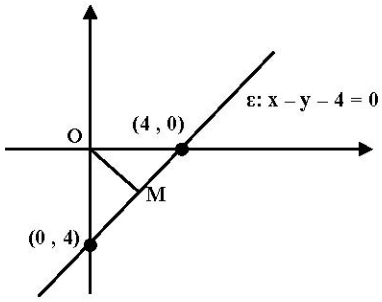
β) Έστω w=x+yi τότε θα έχω $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$

$\Leftrightarrow |x+yi-(1-i)|=|x+yi-(3-3i)|$

$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|(x-3)+(y+3)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}$

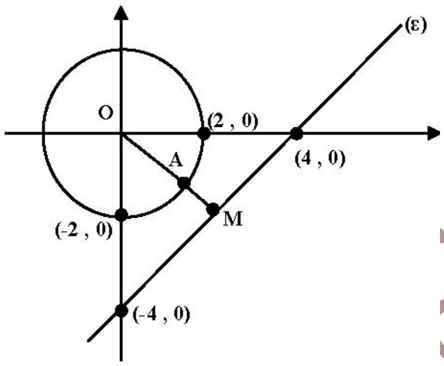
$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2-6x+9+y^2+6y+9$

$\Leftrightarrow 4x-16=4y \Leftrightarrow y=x-4$ Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι η ευθεία ε:y=x-4 γ)



Είναι $\min|w| = d(\mathrm{O},\varepsilon) = \dfrac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

δ)



$|z-w|_{\min} = |d(\mathrm{O},\varepsilon)-\rho| = 2\sqrt{2}-2$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$

Άρα η f συνεχής στο $x_0=0$

β)

Για x>0, $f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1$

$\Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{e}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x+1<0 \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{e}$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Η f συνεχής στο $[0,+\infty)$

f γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

f γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\dfrac{1}{e}\right]$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_1=\dfrac{1}{e}$ το

$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\cdot\ln\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}\cdot(\ln 1-\ln e)=-\dfrac{1}{e}$

Στο $x_2=0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0)=0$

Σύνολο τιμών της f:

$$f([0,+\infty))= f\left(\left[0,\frac{1}{e}\right]\right)\cup f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)$$

$$=\left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right]\cup[\, f\frac{1}{e}, \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$=\left[-\frac{1}{e},0\right]\cup\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$$

(αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$)

Άρα: $f([0,+\infty))=\left[-\frac{1}{e}.+\infty\right)$

γ) $x=e^{\frac{a}{x}} \overset{(x>0)}{\Leftrightarrow} \ln x=\ln e^{\frac{a}{x}}$

$\Leftrightarrow \ln x=\frac{a}{x}\ln e$

$\Leftrightarrow x\ln x=a \Leftrightarrow f(x)=a,\ a\in R$ (1)

Άρα: Από το σύνολο τιμών της f έχουμε:

- Αν $a<-\frac{1}{e}$, είναι αδύνατη η (1)
- Αν $a=-\frac{1}{e}$, η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα
- Αν $-\frac{1}{e}<a<0$ η (1) έχει δυο ακριβώς ρίζες
- Αν $\alpha\geq 0$ η (1) έχει μία ακριβώς ρίζα

δ) Για κάθε $x>0$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x,x+1]$, επομένως υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$, ώστε $f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$

αλλά $f''(x)=\frac{1}{x}>0$, επομένως f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε:

$\xi<x+1\Rightarrow f'(\xi)<f'(x+1)\Rightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

Θέμα 4ο

α) Ονομάζουμε $k=\int_0^2 f(t)dt$, τότε $f(x)=(10x^3+3x)k-45$

Άρα $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2[(10x^3+3x)k-45]dx \Leftrightarrow k=k\left[\frac{5}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^2-45[x]_0^2=k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 46k-90=k \Leftrightarrow k=2$.

Άρα $f(x)=20x^3+6x-45$.

β) Έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$ θέτω $-h=u$, τότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}=\lim_{u\to 0}\frac{g'(x)-g'(x+u)}{-u}=\lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u)-g'(x)}{u}=g''(x).$$

γ)

i. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\overset{d'H}{=}\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}\overset{\text{από}(\beta)}{=}g''(x)$.

Άρα $g''(x)=f(x)+45 \Leftrightarrow (g'(x))'=(5x^4+3x^2)'$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ώστε $g'(x)=5x^4+3x^2+c$ και επειδή $g'(0)=1$, τότε $c=1$, δηλαδή $g'(x)=5x^4+3x^2+1$ οπότε $g'(x)=(x^5+x^3+x)'$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ώστε $g(x)=x^5+x^3+x+c$ και επειδή $g(0)=1$, τότε $c=1$, δηλαδή $g(x)=x^5+x^3+x+1$.

ii. $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και $1-1$.