

**ΘΕΜΑ 1ο**

A1. Θεωρία 2.3 σχολικού βιβλίου.

- A2. α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

- B1. 1. ζ
2. γ
3. α
4. δ
5. β

B2. $|z| = 1$ άρα $|z|^2 = 1$ **ΘΕΜΑ 2ο**

α. Η f συνεχής στο $(-\infty, 3)$ και $(3, +\infty)$ ως πολυωνυμική και ημίγειρο συνεχών συναρτήσεων αντίστοιχα.

Η f είναι συνεχής και στο 3 αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \alpha x^2 = 9\alpha = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - e^{x-3}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1 - e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-e^{x-3}) = -e^0 = -1$$

$$\text{Έτσι } 9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{9}$$

β. Για $x > 3$, $f'(x) = \frac{-e^{x-3}(x-3) - (1 - e^{x-3})}{(x-3)^2}$

$$f(4) = \frac{1 - e}{1} = 1 - e, \quad f'(4) = \frac{-e - 1 + e}{1^2} = -1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(4, f(4))$ είναι:

$$y - (1 - e) = -(x - 4) \Leftrightarrow y = -x + 5 - e$$



Ο Μαθηματικός όλων των μαθητών

γ. Για $x \in [1, 2]$ είναι $f(x) = -\frac{1}{9}x^2$

Δηλαδή $f(x) \leq 0$, $x \in [1, 2]$. Επίσης f συνεχής στο $[1, 2]$ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\varepsilon(\Omega) = \int_1^2 (-f(x))dx = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{27}(8-1) = \frac{7}{27} \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Έχουμε: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ (1)

$$\beta^2 < 3\gamma$$

Τα 2 μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις οπότε από την (1) έχουμε:

$$3f^2(x) \cdot f'(x) + 2\beta f(x) \cdot f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \text{ ή}$$

$$(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2),$$

$$\text{Είναι: } 3x^2 - 4x + 6 > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αφού η διακρίνουσα του Δ είναι: $\Delta = -56 < 0$ και

$$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς $f(x)$ είναι: $\Delta_1 = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$

α. Από τη (2) έχουμε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

β. Από τη (2) έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

γ. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$, άρα η $f(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0, 1)$ (3)

Από την (1) για $x = 0$ έχουμε:

$$f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) = -1 \Leftrightarrow$$

$$f(0)(f^2(0) + \beta f(0) + \gamma) = -1$$

Για το τριώνυμο $f^2(x) + \beta f(x) + \gamma$ ως προς $f(x)$ έχουμε διακρίνουσα $\beta^2 - 4\gamma < 0$

(διότι $0 \leq \beta^2 < 3\gamma$ και άρα $\beta^2 - 4\gamma < -\gamma < 0$).

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad f^2(x) + \beta f(x) + \gamma > 0$$

$$\text{Άρα } f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0$$

Οπότε: $f(0) < 0$. Επίσης από (1) για $x = 1$ έχουμε:

$$f^3(1) + \beta f^2(1) + \gamma f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1)(f^2(1) + \beta f(1) + \gamma) = 4$$

και επειδή $f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0$ προκύπτει $f(1) > 0$



Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0)f(1) < 0$

Από το Θ. Bolzano συμπεραίνουμε ότι η $f(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$
(4)

Από (3) και (4) προκύπτει πως η $f(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Θέτουμε $x t = u$ και διαφορίζουμε ως προς t .
Έτσι έχουμε $d(x t) = du$ ή $x dt = du$

Ακόμα για

- $t = 0$ έχουμε $u = 0$ και
- $t = 1$ έχουμε $u = x$.

Άρα:

$$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt = 1 - 2 \int_0^1 x^2 t f^2(xt) dt = 1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du$$

Επειδή η f είναι συνεχής, προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$\int_0^x u f^2(u) du$$

είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Άρα: $f'(x) = -2x f^2(x)$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{f(x)} - x^2 \right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x \stackrel{(a)}{=} \\ &= -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = +2x - 2x = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η $g(x)$ σταθερή.

γ)

Επειδή η συνάρτηση g είναι σταθερή δηλαδή $g(x) = c$ για κάθε x , θα είναι για $x = 0$: $g(0) = c$.

Ακόμα:

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} - 0^2 = \frac{1}{f(0)}$$

οπότε:

$$\frac{1}{f(0)} = c$$

Από την (ii) για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1$.

Επομένως: $c = 1$.

Άρα: $g(x) = 1$ και λόγω της:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$$

προκύπτει:

$$1 = \frac{1}{f(x)} - x^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

δ)

$$\begin{aligned} x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x &= x \cdot \frac{1}{1+x^2} \eta\mu 2x = \\ &= \frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x, \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\left| \frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x \right| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| |\eta\mu 2x| \leq \left| \frac{x}{1+x^2} \right|$$

Άρα

$$\left| \frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x \right| \leq \left| \frac{x}{1+x^2} \right|,$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x}{1+x^2} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

με το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \eta\mu 2x \right) = 0$$

