

**ΘΕΜΑ 1ο**

A. Θεωρία σελ.334 – 335

B.1. Θεωρία σελ. 225

B.2. α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(3) + f(8) + f(3) + f(18) = i^3z + i^8z + i^{13}z + i^{18}z = -iz + z + iz - z = 0$

β. $f(13) = i^{13}z = Iz = i\rho(\cos\theta + i\eta\mu\theta) = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\rho(\cos\theta + i\eta\mu\theta) =$
 $= \rho\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$

γ. Οι κορυφές είναι $O(0,0)$, $A(z)$, (iz) . Ο iz στρέφει κατά 90° τη διανυσματική ακτίνα του z

Δηλ $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ **B**

Άρα: $E = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2}|z| \cdot |iz| = \frac{1}{2}2 \cdot 2 = 2$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Επειδή η f είναι συνάρτηση έχω $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$
 $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ και επειδή $f \circ g$ είναι '1-1' θα έχω $x_1 = x_2$

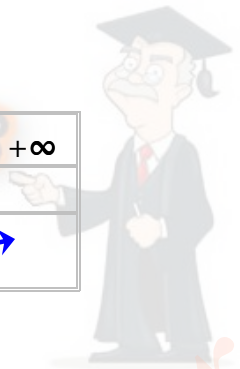
β. $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$
 $f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1$
 $x^3 - 3x + 1 = 0$

Έστω $h(x) = x^3 - 3x + 1$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R}

Έχω $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	-	+
$h(x)$				

Ο Μαθηματικός, όλων των μαθητών



Στο $(-\infty, -1]$ η h συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Το σύνολο τιμών είναι $(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(-1)] = (-\infty, 3]$

Άρα υπάρχει μοναδική αρνητική ρίζα στο $(-\infty, -1]$

Στο $(-1, 1]$ η h συνεχής και γνησίως φθίνουσα

Το σύνολο τιμών είναι $[h(1), h(-1)] = [-1, 3]$

Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα στο $[-1, 1]$

Όμως h συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολωνομική

$$h(0) = 1$$

$$h(1) = -3$$

$$\text{Οπότε } h(0) \cdot h(1) = -3 < 0$$

Άρα ισχύει το θεώρημα του Bolzano δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$ τέτοια ώστε $h(x_0) = 0$.

Τελικά υπάρχει μοναδική θετική ρίζα στο $[-1, 1]$

Στο $[1, +\infty)$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Το σύνολο τιμών είναι

$$[h(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)] = [-1, +\infty).$$

Άρα υπάρχει μοναδική θετική ρίζα στο $[1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = h(x) - g(x) \quad x \in [a, \beta]$$

Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή είναι $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ προκύπτει ότι

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta].$$

$$\text{έχουμε: } \int_a^{\beta} \varphi(x) dx > 0 \quad \text{ή} \quad \int_a^{\beta} (h(x) - g(x)) dx > 0 \quad \text{ή} \quad \int_a^{\beta} h(x) dx - \int_a^{\beta} g(x) dx > 0$$

$$\text{Άρα } \int_a^{\beta} h(x) dx > \int_a^{\beta} g(x) dx.$$



β.i.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} έχουμε:

$$f(x) - e^{-f(x)}(-f(x)) = 1 \quad \text{ή}$$

$$f(x) + f(x)e^{-f(x)} = 1 \quad \text{ή}$$

$$f(x)[1 + e^{-f(x)}] = 1 \quad \text{ή}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}, \text{ αφού } 1 + e^{-f(x)} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{f(x)}}} = \frac{e^{f(x)}}{e^{f(x)} + 1} \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

β.ii.

Επειδή είναι $f(0) = 0$ η ζητούμενη ανίσωση

$\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ για $x > 0$ γράφεται:

$$\frac{x}{2} < f(x) - f(0) < x f'(x) \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < f'(x).$$

Η f στο $[0, x]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει

ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$: $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Τότε όμως αρκεί να δειχθεί

$$\frac{1}{2} < f''(\xi) < f''(x) \quad \text{ή}$$

$$\frac{e^{f(0)}}{1 + e^{f(0)}} < f''(\xi) < f''(x) \quad \text{ή}$$

$$f(0) < f(\xi) < f(x), \text{ με } 0 < \xi < x.$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, x]$.

Υπολογίζοντας την $f''(x)$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(\frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}} \right)' = \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot (1 + e^{f(x)}) - e^{f(x)} \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)}{(1 + e^{f(x)})^2} = \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x)}{(1 + e^{f(x)})^2} =$$

$$= \frac{e^{f(x)} \cdot \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}}{(1 + e^{f(x)})^2} = \frac{e^{2f(x)}}{[1 + e^{f(x)}]^3} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} άρα και στο $[0, x]$.

β.iii.

Από β.ii. είναι $f(x) > \frac{x}{2} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} άρα και στο $[0,1]$, θα είναι $E = \int_0^1 f(x) dx$.

Οι συναρτήσεις $\frac{x}{2}$, $f(x)$, $xf'(x)$ είναι συνεχείς στο \mathbb{R} , οπότε με βάση

το ερώτημα α) από $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ είναι:

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 xf'(x) dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E.$$

$$\text{Έτσι } \frac{1}{4} < E \text{ και } 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{1}{2} f(1).$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1).$$

