



ΘΕΜΑ 1

A. Θεωρία σελ .260 σχολικού βιβλίου

B. Θεωρία σελ .213 σχολικού βιβλίου

Γ. $\alpha \rightarrow \Sigma$, $\beta \rightarrow \Sigma$, $\gamma \rightarrow \Lambda$, $\delta \rightarrow \Lambda$, $\epsilon \rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2

α. $f(x) = x^2 \ln x$, $D_f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln x \geq \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}$$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$

Στο $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$ παρουσιάζει ολ. ελάχιστο που είναι

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln e^{-\frac{1}{2}} = e^{-1} \left(-\frac{1}{2}\right) \ln e = \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

το σημείο $\left(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2e}\right)$



Ο Μαθηματικός όλων των μαθητών

β. $f''(x) = (x(2\ln x + 1))' = 2\ln x + 1 + x \cdot 2 \frac{1}{x} = 2\ln x + 3$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln x \geq \ln e^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Η f είναι κοίλη στο $(0, e^{-\frac{3}{2}}]$

Η f είναι κυρτή στο $[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$

Έχουμε: $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \ln e^{-\frac{3}{2}} = e^{-3} \left(-\frac{3}{2}\right) \ln e = \frac{1}{e^3} \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$

το σημείο καμπής είναι $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

γ. Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-\frac{3}{2}}]$ το αντίστοιχο σύνολο τιμών

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$ έχουμε:

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \ln x) = +\infty$$

το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $\left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$



Ο Μαθηματικός όλων των μαθητών

ΘΕΜΑ 3

α. Η g συνεχής στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ με $g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$

$$\text{Είναι } g(0) = f(0) = 0 \quad g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

Από Θ. Rolle $\exists \xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ με $g'(\xi) = 0$

$$e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi (f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = -f'(\xi)$$

β. $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 e^x (2x^2 - 3x) dx = [e^x (2x^2 - 3x)]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 e^x (4x - 3) dx$

$$= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) - [e^x (4x - 3)]_{\alpha}^0 + \int_{\alpha}^0 e^x \cdot 4 dx$$

$$= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) + 3 + e^{\alpha} (4\alpha - 3) + 4 \cdot [e^x]_{\alpha}^0 = -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha + 3 + e^{\alpha} (4\alpha - 3)) + 4(1 - e^{\alpha})$$

$$= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) + 3 + e^{\alpha} (4\alpha - 3) + 4 - 4e^{\alpha}$$

$$= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha - 4\alpha + 3 + 4) + 7$$

$$= e^{\alpha} (2\alpha^2 - 7\alpha + 7) + 7$$

$$= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 7\alpha + 7) + 7$$

γ. $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) = - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (e^{\alpha} \cdot 2\alpha^2 + 7) = -2 \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\alpha^2}{\frac{1}{e^{\alpha}}} + 7$

$$= -2 \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{2\alpha}{\frac{-1}{e^{\alpha}}} + 7 = 4 \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{-1}{e^{\alpha}}} + 7 = -4 \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{\alpha} + 7 = 7$$

ΘΕΜΑ 4

α. $g(x) = \int_1^{x^3} |z|f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0$

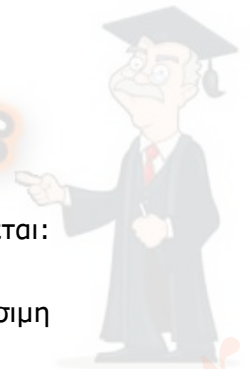
Επειδή η f είναι συνεχής τότε και $|z|f(t)$ συνεχής

Άρα τη $\int_1^{x^3} |z|f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση

Επίσης το $3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1)$

Άρα $g(x) = \int_1^{x^3} |z|f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1)$ παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έχουμε $g'(x) = |z|f(x^3)3x^2 - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right|$



- β.** Αφού $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(1)=0$, η δοσμένη ανισότητα γράφεται:
 $g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Έτσι όμως η g στο $x_0=1$ παρουσιάζει ελάχιστο και επειδή είναι παραγωγίσιμη σε αυτό συνεπάγεται από θ . Fermat ότι $g'(1)=0$.

Όμως $g'(1) = 3 \cdot |z| \cdot f(1) - 3 \cdot \left| z + \frac{1}{z} \right|$ και επειδή $f(1)=1$ βρίσκουμε ότι

$$g'(1) = 3 \cdot |z| - 3 \cdot \left| z + \frac{1}{z} \right|.$$

Αφού $g'(1)=0$, έπεται $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$.

- γ.** Επειδή είναι $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$, προκύπτει ότι $|z|^2 = \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = \left(z + \frac{1}{z} \right) \cdot \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right)$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = z \cdot \bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \Leftrightarrow 0 = z^2 + \bar{z}^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = -1 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z^2) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}.$$

- δ.** Είναι

$z^2 = (a + \beta \cdot i)^2 = a^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta \cdot i$ οπότε $\operatorname{Re}(z^2) = a^2 - \beta^2$ και λόγω του ερωτήματος γ έχουμε:

$$a^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \text{ ή } (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}.$$

Επειδή $a > \beta$ προκύπτει ότι

$$\alpha + \beta < 0, \text{ οπότε } \beta < -\alpha < 0.$$

Έτσι για την συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} άρα και στο $[2,3]$ είναι:

$$f(2)=a>0 \text{ και } f(3)=\beta<0, \text{ οπότε } f(2) \cdot f(3) < 0.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα $[2,3]$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.