



ΘΕΜΑ 1°

A.1 βιβλίο σελ. 194

A.2 βιβλίο σελ. 280

B. $\alpha \rightarrow$ Λάθος, $\beta \rightarrow$ Λάθος, $\gamma \rightarrow$ Σωστό, $\delta \rightarrow$ Σωστό, $\epsilon \rightarrow$ Λάθος, $\sigma\tau \rightarrow$ Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι: $|z_1| = 3 \Rightarrow |z_1|^2 = 9 \Rightarrow z_1 \bar{z}_1 = 9 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$

β. Έστω $w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ τότε $\bar{w} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} = w$

Άρα $w \in \mathbb{R}$

γ. Έχω $|z_1 + z_2 + z_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| =$
 $= \left| \frac{9z_2z_3 + 9z_1z_3 + 9z_1z_2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} \right| = \frac{9|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3|} = \frac{9|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} =$
 $= \frac{9|z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3|}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3}|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$



ΘΕΜΑ 3ο

Ο Μαθηματικός όλων των μαθητών

α. $f(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow f'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x} > 0$ αφού $\lambda > 0$ άρα η f γν. αύξουσα στο \mathbb{R} .

β. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): $\psi - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ κ' αφού περνά από την αρχή των αξόνων θα είναι:

$$0 - e^{\lambda x_0} = \lambda \cdot e^{\lambda x_0} (0 - x_0) \Rightarrow -e^{\lambda x_0} = -\lambda e^{\lambda x_0} \cdot x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Τότε } (\varepsilon): \psi - f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\psi - e = \lambda \cdot e \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow \psi = \lambda e x - e + e \Rightarrow (\varepsilon): \psi = \lambda \cdot e x$$

Το σημείο επαφής είναι $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$

γ. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} |f(x) - \lambda e x| dx$

Όμως $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$ δηλαδή η f κυρτή στο \mathbb{R} άρα θα είναι “πάνω” από την εφαπτομένη της.

Έτσι:

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (f(x) - \lambda \cdot e \cdot x) dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda \cdot e \cdot x) dx =$$

$$\left[\frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda x} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \left[\lambda \cdot e \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{e-2}{2\lambda}$$

δ. Είναι $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \cdot \frac{e-2}{2}}{2 + \eta\mu\lambda} = \frac{e-2}{2} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda}$

Όμως $-1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \eta\mu\lambda \leq 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \eta\mu\lambda} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{3} \leq \frac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} \leq \lambda$$

και επειδή $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{3} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda = +\infty$

από κριτ. παρεμβολής θα είναι $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty$

Άρα $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $2f'(x) = e^{x-f(x)}$

$$2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Rightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} \Rightarrow (e^{f(x)})' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \Rightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c_1$$

Για $x=0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$ Άρα $e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$

β. Για το $\int_0^x f(x-t)dt$ Θέτουμε $v = x-t$

$$\begin{aligned}t &= x - v \\dt &= -dv \\t=0 &\Rightarrow v = x \\t=x &\Rightarrow v = 0\end{aligned}$$

οπότε $\int_0^x f(x-t)dt = \int_x^0 f(v)(-dv) = \int_0^x f(v)dv$

Το όριο γίνεται: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(v)dv}{\eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\ln\left(\frac{e^0+1}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu 0} = 0$

γ. Είναι $h'(x) = \left(\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t)dt\right)' = \left(\int_0^x t^{2005} \cdot f(t)dt\right)' - \left(\int_0^{-x} t^{2005} \cdot f(t)dt\right)'$

$$= x^{2005}f(x) - (-x)^{2005}f(-x) \cdot (-x)' = x^{2005}f(x) - x^{2005}f(-x) = x^{2005} \cdot \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) - x^{2005} \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)$$
$$= x^{2005} \left[\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) \right] = x^{2005} \ln\left(\frac{\frac{1+e^x}{2}}{\frac{1+e^{-x}}{2}}\right) = x^{2005} \ln\left(\frac{1+e^x}{1+\frac{1}{e^x}}\right)$$
$$= x^{2005} \ln e^x = x^{2005} \cdot x \cdot \ln e = x^{2006}$$
$$g'(x) = \frac{1}{2007} 2007 \cdot x^{2006} = x^{2006}$$

Άρα $h'(x) = g'(x) \Rightarrow h(x) = g(x) + c$ και με $x=0$

$$h(0) = g(0) + c \Rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow h(x) = g(x)$$

δ. Η εξίσωση γράφεται $g(x) = \frac{1}{2008}$

Θεωρούμε: την $\varphi(x) = g(x) - \frac{1}{2008} = \frac{x^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008}$

Η φ συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών και $\varphi(0) = -\frac{1}{2008} < 0$,

$$\varphi(1) = \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} = \frac{1}{2007 \cdot 2008} > 0$$

Από Θ. Bolzano \exists ρίζα $\rho \in (0,1)$ με $\varphi(\rho) = 0$

Επειδή $\varphi'(x) = x^{2006} > 0$ η φ είναι γν. αύξουσα \rightarrow η ρίζα είναι μοναδική.