



Ο Μαθηματικός όλων των μαθητών

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A1. σελ. 253

A2. σελ. 273

B. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

α.  $f'(x) = 2 \cdot (x - 2) > 0$  για κάθε  $x > 2$

Άρα η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $[2, +\infty) \Rightarrow$  η  $f$  «1-1»

β. Αφού η  $f$  «1-1» υπάρχει η αντίστροφη και έχουμε:

$$\psi = f(x) \Leftrightarrow \psi = 2 + (x - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = \psi - 2 \text{ [πρέπει } \psi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \psi \geq 2 \text{ ]} \Leftrightarrow x - 2 = \pm \sqrt{\psi - 2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{\psi - 2}$$

Αλλά  $x \geq 2 \rightarrow 2 + \sqrt{\psi - 2} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\psi - 2} \geq 0$  ισχύει για κάθε  $\psi \in \mathbb{R}$

ή  $2 - \sqrt{\psi - 2} \geq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{\psi - 2} \geq 0$  ισχύει μόνο για  $\psi = 2$

Άρα  $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}$  με Π.ο.  $[2, +\infty)$

γ. Έχουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} \psi = x \\ \psi = f(x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow 2 + (x - 2)^2 = x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = 2, \quad x = 3$$

Τα κοινά σημεία της  $f$  και της  $\psi = x$  είναι A(2,2) B(3,3)

Επειδή η  $f$  γίνεται αύξουσα λόγω συμμετρίας, τα κοινά σημεία των  $f^{-1}$  και  $\psi = x$  είναι τα A B

δ. Λόγω συμμετρίας, θα βρω το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της  $f$  και της  $\psi = x$  οπότε ζητούμενο εμβαδό θα είναι το διπλάσιο.

Είναι

$$f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow 2 + (x - 2)^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | 2 | 3 |   |
| + |   | - | + |

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_2^3 |2 + (x - 2)^2 - x| dx = \int_2^3 (x - 2 - (x - 2)^2) dx =$$

$$= \int_2^3 (-x^2 + 5x - 6) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 6x \right]_2^3$$

$$= \frac{1}{6} \text{ Το ζητούμενο εμβαδό είναι } 2 \cdot E(\Omega) = \frac{1}{3}$$



Ο Μαθηματικός των μαθητών

α. i. Είναι  $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2 - z_3, z_2 = -z_1 - z_3$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } |z_1 - z_2| &= |z_3 - z_1| \Leftrightarrow |-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3| \\ &\Leftrightarrow |-2z_2 - z_3| = |2z_3 + z_2| \Leftrightarrow |2z_2 + z_3| = |2z_3 + z_2| \\ 4z_2\bar{z}_2 + 2z_2z_3 + 2\bar{z}_2z_3 + z_3\bar{z}_3 &= 4z_3\bar{z}_3 + 2\bar{z}_2z_3 + 2z_2\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_2 \\ &\rightarrow 4+1=4+1 \text{ ισχύει} \end{aligned}$$

$$\text{Διότι } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ομοίως } |z_1 - z_2| &= |z_2 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 + z_1 + z_3| = |-z_1 - z_3 - z_3| \\ &\Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |-z_1 - 2z_3| \Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |z_1 + 2z_3| \end{aligned}$$

Και καταλήγουμε ότι  $4+1=4+1$  που ισχύει

ii. Από τριγ. Ανισότητα έχουμε:

$$|z_1 - z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } |z_1 - z_2|^2 \leq 4 &\Leftrightarrow (z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 4 \\ &\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 \leq 4 \rightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 \geq -2 \\ &\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 \geq -2 \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή } 2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1$$

β. Επειδή  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  οι εικόνες  $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$  των  $z_1, z_2, z_3$  αντίστοιχα, ανήκουν σε κύκλο με  $K(0,0), \rho=1$  δηλαδή  $C: \chi^2 + \psi^2 = 1$

$$\text{Είναι } |z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow (AB) = (\Gamma A) = (B\Gamma)$$

Άρα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

#### ΘΕΜΑ 4

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$$

α) πρέπει  $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$  και  $x > 0$  άρα  $A_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$



$$f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} < 0 \Rightarrow f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } (0,+\infty)$$

Έστω  $A_1=(0,1)$  και  $A_2=(1,+\infty)$

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x+1}{x-1} \right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -1 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x+1}{x-1} - \ln x \right] = 1 - \infty = -\infty$$

| x       | 0   | 1  | $+\infty$ |
|---------|---|--|-----------|
| $f'(x)$ | -   | -  | -         |
| $f(x)$  |  |  |           |

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x+1}{x-1} \right) - \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x+1}{x-1} \right) - \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x) = -\infty$$

$$f(A_1) = f((0,1)) = \left( \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

$$f(A_2) = f(1, +\infty) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{Άρα } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, +\infty)$$

β) Επειδή  $f(A_1) = (-\infty, +\infty)$  περιέχει την τιμή 0 άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0,1)$ . Επειδή  $f \downarrow$  αυτή η ρίζα είναι μοναδική.

Επειδή  $f(A_2) = (-\infty, +\infty)$  περιέχει την τιμή 0. Άρα περιέχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(1,+\infty)$ . Επειδή  $f \downarrow$  αυτή η ρίζα είναι μοναδική

Επομένως στο  $(0,1)$  μια ακριβώς ρίζα

Στο  $(1,+\infty)$  μία ακριβώς ρίζα

Άρα στο Π.Ο.  $= (0,1) \cup (1,+\infty)$  δυο ακριβώς ρίζες



## Ο Μαθηματικός όλων των μαθητών

γ) Έχουμε:

$$g(x) = \ln x \quad A(a, \ln a)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad y - g(a) = g'(a)(x - a) \quad \text{γενική εξίσωση εφαπτομένης}$$

$$g(a) = \ln a \quad y - \ln a = \frac{1}{a}x - 1$$

$$\text{εξίσωση εφαπτομένης } y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1 \quad (\varepsilon_1)$$

Επίσης:

$$h(x) = e^x \quad B(\beta, e^\beta) \quad \text{εξίσωση εφαπτομένης}$$

$$h'(x) = e^x \quad h(\beta) = e^\beta \quad y - e^\beta = e^\beta(x - \beta)$$

$$h'(\beta) = e^\beta \quad y = e^\beta x - \beta e^\beta + e^\beta \quad (\varepsilon_2)$$

$$(\varepsilon_1) \equiv (\varepsilon_2)$$

πρέπει

$$\left. \begin{aligned} e^\beta = \frac{1}{a} \Rightarrow \beta = \ln \frac{1}{a} \Rightarrow \beta = -\ln a \\ \ln a - 1 = -\beta e^\beta + e^\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ln a - 1 = \ln a \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow \ln a - \ln a \frac{1}{a} = \frac{1}{a} + 1 \Rightarrow$$

$$\ln a \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \frac{1+a}{a} \Rightarrow \ln a \left(\frac{a-1}{a}\right) = \frac{1+a}{a} \Rightarrow \ln a - \frac{1+a}{a-1} = 0 \quad \text{ή} \quad f(a) = 0$$

δ) Για κάθε  $a > 0$  ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  θεωρούμε  $A(a, \ln a)$  και  $B(\beta, e^\beta)$ , με  $\beta = -\ln a$ . Από το γ) η εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $A$  συμπίπτει με την εφαπτομένη της  $C_h$  στο  $B$ . όμως η  $f(x) = 0$  έχει δύο λύσεις. Συνεπώς υπάρχουν ακριβώς δυο κοινές εφαπτόμενες.