



Ο Μαθηματικός όλων των μαθητών

Θέμα 1

A1. σχολικό βιβλίο σελ. 98

A2. σχολικό βιβλίο σελ. 141

A3. σχολικό βιβλίο σελ. 280

B.

α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

Θέμα 2

$$\alpha) |z| = \frac{|2 + \alpha i|}{|\alpha + 2i|} = \frac{\sqrt{4 + \alpha^2}}{\sqrt{4 + \alpha^2}} = 1 \quad \text{ή} \quad |z|=1 \text{ κύκλος με Κ(0,0) και R=1}$$

$$\beta) z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$$

$$\text{για } \alpha = 0, \quad z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i, \text{ με εικόνα το σημείο } A(0, -1)$$

$$\text{για } \alpha = 2, \quad z_2 = \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = \frac{1}{1} = 1, \text{ με εικόνα το σημείο } B(1, 0)$$

$$\text{τότε } |z_1 - z_2| = (AB) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\gamma) \left. \begin{array}{l} (z_1)^{2v} = (-i)^{2v} = [(-i)^2]^v = (-1)^v \\ (-z_1)^v = (-1)^v \end{array} \right\} \Rightarrow (z_1)^{2v} = (-z_1)^v$$

ΘΕΜΑ 3

α. $D_f = R$

Η f είναι συνεχής στο R με $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

Στο $x = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$

στο $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο $f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f(x)$			

Στο $x = 0$ παρουσιάζει σημείο καμπής

β. Έχω $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

Όμως $2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ όταν $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ έχω $f(-\infty, 1] = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$

Άρα στο Σ.Τ. περιέχεται το 0 και f είναι γνησίως αύξουσα άρα έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, -1]$

$f(-1, 1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$, $2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ με $-2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$ και $2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$

Άρα στο Σ.Τ. περιέχεται το 0 και f είναι γνησίως φθίνουσα άρα έχει μοναδική ρίζα στο $(-1, 1)$

και $f[1, +\infty) = [-2(1 + \eta\mu^2\theta), +\infty)$ στο Σ.Τ. περιέχεται το 0 και f είναι γνησίως

αύξουσα άρα έχει μοναδική ρίζα στο $[1, +\infty)$

Οπότε τελικά έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ. $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1, -2(1 + \eta\mu^2\theta))$, $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$

Για να βρίσκονται τα σημεία αυτά στην ευθεία $\psi = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ πρέπει οι συντεταγμένες τους να την επαληθεύουν.

Για το $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$ πρέπει: $2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \sigma\upsilon\nu^2\theta$ ισχύει

Για το $B(1, -2(1 + \eta\mu^2\theta))$ πρέπει: $-2(1 + \eta\mu^2\theta) = -2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2(1 + \eta\mu^2\theta) = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$ ισχύει

Για το $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$ πρέπει: $-2\eta\mu^2\theta = -2 \cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta$ ισχύει

δ. $f(x) = \psi \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

$$x^3 - 3x + 2x = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=0} \text{ ή } x^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm 1}$$

$$\text{Άρα } E = \int_{-1}^1 |f(x) - \psi| dx = \int_{-1}^1 |x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta + 2x + 2\eta\mu^2\theta| dx =$$

$$= \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx \quad (1)$$

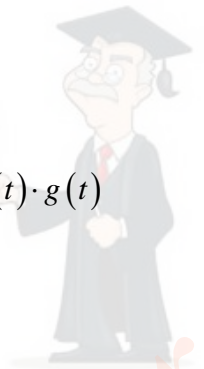
Βρίσκω το πρόσημο του $x^3 - x$

$$\text{Έχω } x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \geq 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+	
$x^2 - 1$	+	-	-	+	
$f(x)$	-	+	-	+	

$$\text{Άρα η (1): } E = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx + \int_0^1 |x^3 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 4

α. $f(x) \cdot g(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ άρα και στο $[0,x]$ με $x \in [0,1]$ οπότε $f(t) \cdot g(t)$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών

Άρα το $\int_0^x f(t) \cdot g(t) dt$ παραγωγίσιμο

Άρα $F'(x) = f(x) \cdot g(x)$ Ομοίως και $\int_0^x g(t) dt$ παραγωγίσιμο

Επειδή $f \uparrow$ στο $[0,1]$ για $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow f(x) > f(0) > 0$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1]$ και $g(x) > 0$ στο $[0,1]$

$$F'(x) = f(x) \cdot g(x) > 0$$

Άρα $F \uparrow$ στο $[0,1]$

Για $x > 0$

$$F(x) > F(0)$$

$$F(x) > 0$$

β. Για $0 \leq t \leq x \Leftrightarrow f(0) \leq f(t) \leq f(x)$

$$0 < f(0) \leq f(t) \leq f(x) \Leftrightarrow 0 < f(t) \leq f(x)$$

Επειδή $g(t) > 0$ πολλαπλασιάζω με $g(t)$

$$0 < f(t) \cdot g(t) \leq f(x) \cdot g(t)$$

$$f(x) \cdot g(t) - f(t) \cdot g(t) \geq 0$$

Και επειδή $f(x) \cdot g(t) - f(t) \cdot g(t)$ δεν είναι ίση με 0 για κάθε $x \in (0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^x (f(x) \cdot g(t) - f(t) \cdot g(t)) dt > 0$$

$$\int_0^x f(x) \cdot g(t) dt - \int_0^x f(t) \cdot g(t) dt > 0$$

$$\int_0^x f(x) \cdot g(t) dt > \int_0^x f(t) \cdot g(t) dt$$

$$f(x) \int_0^x g(t) dt > \int_0^x f(t) \cdot g(t) dt$$

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$



$$\gamma. \text{ Θεωρώ την } h(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$$

(Σημείωση: Επειδή $g(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^x g(t) dt > 0 \quad \forall x \in (0,1]$$

Άρα $G(x) > 0$)

Η h παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων

$$\Rightarrow h'(x) = \left(\frac{F'(x)}{G(x)} \right) = \frac{F'(x) \cdot G(x) - F(x) \cdot G'(x)}{(G(x))^2} =$$

$$\frac{f(x) \cdot g(x) \cdot G(x) - F(x) \cdot g(x)}{(G(x))^2} = \frac{g(x)(f(x) \cdot G(x) - F(x))}{(G(x))^2}$$

Αλλά $g(x) > 0$ και

$$f(x) \cdot G(x) - F(x) > 0 \text{ από (β) ερώτημα και } (G(x))^2 > 0$$

Άρα $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1]$

Άρα $h \uparrow$ στο $(0,1]$

Για $x \leq 1$

$$h(x) \leq h(1)$$

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

δ. Βρίσκουμε τα όρια

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) \cdot g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) \cdot g(x)}{g(x)} \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(0)$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{5} x \frac{\eta \mu x^4}{x^4} = \frac{2}{5} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$\text{Άρα το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\int_0^x f(t) \cdot g(t) dt}{\int_0^x g(t) \cdot dt} \cdot \frac{\int_0^x \eta \mu t^2}{x^5} \right] = f(0) \cdot 0 = 0$$